Chapitre 17

Espaces vectoriels de dimension finie

Dans tout ce chapitre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Espaces vectoriels de dimension finie

1.1 Cardinal d'une famille finie de vecteur

On rappelle qu'on appelle famille finie de vecteurs de $\mathbb{E}$ tout n-uplet de vecteurs de $\mathbb{E}$, où $n \in \mathbb{N}$.

Si $\mathscr{F}$ est une famille finie de vecteurs de $\mathbb{E}$, il existe donc un unique entier naturel $n \in \mathbb{N}$ et un unique n-uplet $\left(\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_n}\right)$ de vecteurs de $\mathbb{E}$, tels que :

$$\mathscr{F} = \left(\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_n}\right)$$

L'entier n est appelé **cardinal** de la famille $\mathscr{F}$.

⚠Contrairement aux ensembles, les élements d'une famille ne sont pas nécessairement deux à deux distincts.
Si $\mathscr{F} = \left\{\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{x}\right\}$, alors $\mathrm{Card}(\mathscr{F}) = 1$.
Si $\mathscr{F} = \left(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{x}\right)$, alors $\mathrm{Card}(\mathscr{F}) = 3$.

Le cas $n = 0$, correspond au cas de la famille vide $\mathscr{F} = \emptyset$.

1.2 Bases et dimension

Définition 1 Espace vectoriel de dimension finie
Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-ev, ie un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. On dit que $\mathbb{E}$ est de dimension finie lorsqu'il admet une famille génératrice finie.
Dans le cas contraire, on dit que $\mathbb{E}$ est de dimension infinie.

***Exemple* :** $\mathbb{K}^n$ et $\mathbb{K}_n[X]$ sont de dimension finie.

***Exemple* :** Nous n'avons pas les outils pour le démontrer mais on peut tout de même le signaler : $\mathbb{K}[X]$, $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ sont de dimension infinie.

Nous allons maintenant étudier l'existence de bases dans un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie.

Remarquons tout d'abord que, dans tout $\mathbb{K}$-ev $\mathbb{E}$, il existe toujours une famille génératrice qui est $\mathbb{E}$ lui-même. Si $\mathbb{E}$ n'est pas réduit au vecteur nul, alors tout vecteur $\overrightarrow{x}$ de $\mathbb{E}$ différent du vecteur nul donne $\left(\overrightarrow{x}\right)$ famille libre, et donc $\mathbb{E}$ admet toujours une famille libre. Par contre, il n'est pas clair que $\mathbb{E}$ admet au moins une base. C'est l'objet du théorème suivant.

À toutes fins utiles, rappelons que, par convention, $\emptyset$ est une base de $\left\{\overrightarrow{0}_{\mathbb{E}}\right\}$, et donc $\left\{\overrightarrow{0}_{\mathbb{E}}\right\}$ est un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie.

Théorème 2 Existence de bases en dimension finie
Si $\mathbb{E}$ est de dimension finie, alors $\mathbb{E}$ admet au moins une base composée d'un nombre fini de vecteurs.

En fait si $\mathscr{B} = \left(\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \ldots, \overrightarrow{e}_n\right)$ est une telle base de $\mathbb{E}$, alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}^*$, $\left(\lambda.\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \ldots, \overrightarrow{e}_n\right)$ en est une autre. Ceci prouve que $\mathbb{E}$ admet en une infinité de bases.

Ce n'est pas au programme mais intéressant à savoir : si $\mathbb{E}$ est de dimension infinie, alors $\mathbb{E}$ admet aussi des bases (infinies), grâce à l'axiome du choix.

Démonstration : On peut supposer sans perte de généralité que $\mathbb{E}$ n'est pas réduit à $\left\{\overrightarrow{0}_{\mathbb{E}}\right\}$. Puisque $\mathbb{E}$ est de dimension finie, $\mathbb{E}$ admet une famille génératrice finie qu'on note $\mathscr{F} = \left(\overrightarrow{u}_1, \ldots, \overrightarrow{u}_p\right)$.

• Si $\mathscr{F}$ est libre, alors $\mathscr{F}$ est un base finie de $\mathbb{E}$ et le résultat est démontré.

• Si $\mathscr{F}$ est liée, alors un des vecteur est CL des autres. Par exemple, supposons que $\overrightarrow{u}_p$ est CL de $\left(\overrightarrow{u}_1, \ldots, \overrightarrow{u}_{p-1}\right)$. Dans ce cas $\widetilde{\mathscr{F}}$ est encore une famille génératrice de $\mathbb{E}$. On recommence alors le raisonnement avec $\widetilde{\mathscr{F}}$: si elle est libre on a trouvé une base finie, sinon on peut encore lui enlever un vecteur tout en gardant son caractère générateur...

Soit on tombe sur une famille génératrice et libre donc une base de $\mathbb{E}$, soit, dans le pire des cas, on tombe $p-1$ fois sur une famille liée, ce qui donne une famille génératrice composée d'un vecteur $\left(\overrightarrow{u}_1\right)$. Puisque $\mathbb{E}$ n'est pas réduit à $\overrightarrow{0}_{\mathbb{E}}$, ce vecteur est non nul et forme donc une famille libre. Ainsi on trouve encore une fois une base finie de $\mathbb{E}$.

CQFD □

Corollaire 3 Extraction de base d'une famille génératrice finie
Si $\mathbb{E}$ est de dimension finie et si $\mathscr{F}$ est une famille génératrice finie de $\mathbb{E}$, alors on peut extraire de $\mathscr{F}$ une base $\mathscr{B}$ finie de $\mathbb{E}$.

***Exemple*:** Donner une base de $\mathbb{E} = \mathrm{Vect}\left[(X-1)^2, X^2, -2X+1\right]$ et de $\mathbb{E} = \mathrm{Vect}[(1,0);(1,1);(0,2)]$.

Lemme 4 Nombre de vecteurs d'une famille libre et d'une famille génératrice
Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie.
On suppose que $\mathscr{L}$ est une famille libre de $\mathbb{E}$ et que $\mathscr{G}$ est une famille génératrice finie de $\mathbb{E}$.
Alors $\mathscr{L}$ est finie et $\mathrm{Card}(\mathscr{L}) \leq \mathrm{Card}(\mathscr{G})$.

Démonstration : Par l'absurde, supposons que $\mathrm{Card}(\mathscr{L}) > \mathrm{Card}(\mathscr{G})$.

On note $\mathscr{G} = \left(\overrightarrow{v}_1, \dots, \overrightarrow{v}_p\right)$ et $\mathscr{L} = \left(\overrightarrow{u}_1, \dots, u_q\right)$. Remarquons que cela impose que $p = \mathrm{Card}(\mathscr{G})$ et $q = \mathrm{Card}(\mathscr{L})$.

Comme on a supposé que $q > p$, on peut noter :

$$\mathscr{L} = \left(\overrightarrow{u}_1, \dots, \overrightarrow{u}_p, \overrightarrow{u}_{p+1}, \dots, \overrightarrow{u}_q\right)$$

• Comme $\mathscr{G}$ est génératrice de $\mathbb{E}$, on a $\overrightarrow{u}_1$ CL des vecteurs de $\mathscr{G}$:

$$\overrightarrow{u}_1 = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i . \overrightarrow{v}_i \qquad \text{où } (\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{K}^p$$

Au moins une des α_i est non nul : sinon on aurait $\overrightarrow{u}_1 = \overrightarrow{0}_{\mathbb{E}}$ ce qui est absurde car $\overrightarrow{u}_1 \in \mathscr{L}$ et $\mathscr{L}$ est libre.

Pour simplifier, supposons que $\alpha_p \neq 0$. Alors :

$$\overrightarrow{v}_p = \frac{1}{\alpha_p}\left(\overrightarrow{u}_1 - \sum_{i=1}^{p} \alpha_i . \overrightarrow{v}_i\right)$$

donc $\overrightarrow{v}_p \in \mathrm{Vect}\left(\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \dots, \overrightarrow{v}_{p-1}\right)$.

D'autre part $\mathscr{G} = \left(\overrightarrow{v}_1, \dots, \overrightarrow{v}_{p-1}, \overrightarrow{v}_p\right)$ est génératrice de $\mathbb{E}$, donc $\left(\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{v}_1, \dots, \overrightarrow{v}_{p-1}, \overrightarrow{v}_p\right)$ l'est aussi. Comme $\overrightarrow{v}_p$ est CL de $\left(\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{v}_1, \dots, \overrightarrow{v}_{p-1}\right)$, on obtient que $\mathscr{G}_1 = \left(\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{v}_1, \dots, \overrightarrow{v}_{p-1}\right)$ est génératrice de $\mathbb{E}$.

On a donc remplacé $\overrightarrow{v}_p$ par $\overrightarrow{u}_1$ dans la famille génératrice $\mathscr{G}$.

• On recommence. Comme $\mathscr{G}_1$ est génératrice de $\mathbb{E}$, on a $\overrightarrow{u}_2$ CL de $\left(\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{v}_1, \dots, \overrightarrow{v}_{p-1}\right)$:

$$\overrightarrow{u}_2 = \beta . \overrightarrow{u}_1 + \sum_{i=1}^{p-1} \alpha_i . \overrightarrow{v}_i \qquad \text{où } (\beta_1, \alpha_1, \dots, \alpha_{p-1}) \in \mathbb{K}^p$$

et comme $\left(\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2\right)$ est libre (sous-famille de $\mathscr{L}$ qui est libre), on a au moins un des α_i qui est non nul.

Pour simplifier, supposons que $\alpha_{p-1} \neq 0$. Alors :

$$\overrightarrow{v}_{p-1} = \frac{1}{\alpha_{p-1}}\left(\overrightarrow{u}_2 - \beta_1 . \overrightarrow{u}_1 - \sum_{i=1}^{p-2} \alpha_i . \overrightarrow{v}_i\right)$$

donc $\overrightarrow{v}_{p-1} \in \mathrm{Vect}\left(\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \overrightarrow{v}_1, \dots, \overrightarrow{v}_{p-2}\right)$.

D'autre part $\mathscr{G}_1 = \left(\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{v}_1, \dots, \overrightarrow{v}_{p-2}, \overrightarrow{v}_{p-1}\right)$ est génératrice de $\mathbb{E}$, donc la famille $\left(\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \overrightarrow{v}_1, \dots, \overrightarrow{v}_{p-2}, \overrightarrow{v}_{p-1}\right)$ l'est aussi, et donc $\mathscr{G}_2 = \left(\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \overrightarrow{v}_1, \dots, \overrightarrow{v}_{p-2}\right)$ est génératrice de $\mathbb{E}$ (puisque $\overrightarrow{v}_{p-1}$ est CL de ces vecteurs).

À ce stade, on a donc remplacé $\overrightarrow{v}_p$ et $\overrightarrow{v}_{p-1}$ par $\overrightarrow{u}_1$ et $\overrightarrow{u}_2$ dans la famille génératrice $\mathscr{G}$.

• Au bout de p étapes, on remplace $\overrightarrow{v}_1, \dots, \overrightarrow{v}_{p-1}, \overrightarrow{v}_p$ par $\overrightarrow{u}_1, \dots, \overrightarrow{u}_{p-1}, \overrightarrow{u}_p$ (ce qui est possible car $q > p$), et on obtient que la famille $\mathscr{G}_p = \left(\overrightarrow{u}_1, \dots, \overrightarrow{u}_p\right)$ est génératrice de $\mathbb{E}$.

Mais alors $\overrightarrow{u}_{p+1}$ est CL de $\mathscr{G}_p$ ce qui contredit le fait que $\mathscr{L}$ est libre.

Par l'absurde, on a donc montré que $\mathrm{Card}(\mathscr{L}) \leq \mathrm{Card}(\mathscr{G})$.

CQFD $\square$

Corollaire 5 Théorème de la dimension finie
Si $\mathbb{E}$ est un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, alors toutes ses bases sont finies et de même cardinal.

Ce théorème permet de définir la notion de dimension.

Définition 6 Dimension
Si $\mathbb{E}$ est un K-ev de dimension finie, on appelle dimension de $\mathbb{E}$ le cardinal commun de toutes ses bases. Ce nombre entier naturel non nul est noté $\dim(\mathbb{E})$.

On adopte la convention que $\left\{\overrightarrow{0}_{\mathbb{E}}\right\}$ est de dimension finie et que $\dim\left(\left\{\overrightarrow{0}_{\mathbb{E}}\right\}\right) = 0$. En général on a donc $\dim(\mathbb{E}) \in \mathbb{N}$ et $\dim(\mathbb{E}) = 0 \Longleftrightarrow \mathbb{E} = \left\{\overrightarrow{0}_{\mathbb{E}}\right\}$.

***Exemple* :** $\mathbb{K}^n$ est de dimension finie et $\dim\left(\mathbb{K}^n\right) = n$.

***Exemple* :** $\mathbb{K}_n[X]$ est de dimension finie et $\dim\left(\mathbb{K}_n[X]\right) = n+1$.

***Exemple* :** $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est de dimension finie et $\dim\left(\mathscr{M}_n(\mathbb{K})\right) = n^2$.

***Exemple* :** $\mathbb{C}$ est de dimension finie en tant que $\mathbb{C}$-ev et aussi en tant que $\mathbb{R}$-ev. De plus, $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) = 1$ et $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2$.

Définition 7 Droites et plans vectoriels
Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-ev.

1. On appelle droite vectorielle de $\mathbb{E}$, tout sev $\mathbb{F}$ de $\mathbb{E}$ vérifiant $\dim(\mathbb{F}) = 1$. Autrement dit ce sont les sev $\mathbb{F}$ de $\mathbb{E}$ tels que $\mathbb{F} = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{u})$ pour $\overrightarrow{u} \in \mathbb{E}$, $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}_{\mathbb{E}}$.
2. On appelle plan vectoriel de $\mathbb{E}$, tout sev $\mathbb{F}$ de $\mathbb{E}$ vérifiant $\dim(\mathbb{F}) = 2$. Autrement dit ce sont les sev $\mathbb{F}$ de $\mathbb{E}$ tels que $\mathbb{F} = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ pour $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right) \in \mathbb{E}^2$, avec $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ non colinéaires.

***Exemple* :** Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{G} = \left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / \ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n\right\}$ est une droite vectorielle.

***Exemple* :** Pour $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $\mathbb{F}_{a,b} = \left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / \ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n\right\}$ est un plan vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (d'après le cours sur les suites réelles récurrentes).

1.3 Familles de vecteurs en dimension finie

Théorème 8 Familles génératrices en dimension finie : extraction d'une base
Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $\mathscr{F}$ une famille finie de vecteurs de $\mathbb{E}$, génératrice de $\mathbb{E}$. Alors :

1. il existe une sous-famille $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{F}$ qui est une base de $\mathbb{E}$;
2. $\mathrm{Card}(\mathscr{F}) \geq \dim(\mathbb{E})$;
3. $\mathrm{Card}(\mathscr{F}) = \dim(\mathbb{E}) \iff \mathscr{F}$ est une base de $\mathbb{E} \iff \mathscr{F}$ est libre.
   Autrement dit une famille génératrice minimale (ie de cardinal minimal) est libre.

⚠ ATTENTION : ce résultat est faux en avec une famille infinie ! On ne peut pas toujours extraire une base d'une famille génératrice composée d'une infinité de vecteurs.

Corollaire 9 Cas de $\mathrm{Vect}(\mathscr{F})$
Si $\mathbb{E}$ est un $\mathbb{K}$-ev et $\mathscr{F}$ est une famille finie de vecteurs de $\mathbb{E}$, alors :

1. $\mathrm{Vect}(\mathscr{F})$ est de dimension finie et $\dim\left[\mathrm{Vect}(\mathscr{F})\right] \leq \mathrm{Card}(\mathscr{F})$;
2. $\dim\left[\mathrm{Vect}(\mathscr{F})\right] = \mathrm{Card}(\mathscr{F}) \iff \mathscr{F}$ est une base de $\mathrm{Vect}(\mathscr{F}) \iff \mathscr{F}$ est libre.

Donc si $\mathscr{F} = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p)$, alors $\dim\left[\mathrm{Vect}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p)\right] \leq p$.

Théorème 10 Familles libres en dimension finie : théorème de la base incomplète
Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $\mathscr{F}$ une famille libre de vecteurs de $\mathbb{E}$. Alors :

1. il existe une sur-famille $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{B}$ qui est une base de $\mathbb{E}$;
2. $\mathrm{Card}(\mathscr{F}) \leq \dim(\mathbb{E})$;
3. $\mathrm{Card}(\mathscr{F}) = \dim(\mathbb{E}) \iff \mathscr{F}$ est une base de $\mathbb{E} \iff \mathscr{F}$ est génératrice de $\mathbb{E}$.
   Autrement dit une famille génératrice minimale (ie de cardinal minimal) est libre.

Si $\mathscr{B}_0$ est une base fixée de $\mathbb{E}$, alors on peut compléter $\mathscr{F}$ en une base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{E}$, en prenant certains vecteurs de la famille $\mathscr{B}_0$.

Exemple **:** $\big((1,1);(1,-1)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

Exemple **:** Compléter $\left(X^2, X^2+1\right)$ en une base de $\mathbb{K}_2[X]$.

Corollaire 11 Base d'un(e) droite/plan vectoriel(le)
Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-ev. Alors :

1. si $\mathbb{F}$ est une droite vectorielle de $\mathbb{E}$, tout vecteur $\vec{u} \neq \vec{0}_{\mathbb{E}}$ élément de $\mathbb{F}$ est une base de $\mathbb{F}$;
2. si $\mathbb{F}$ est un plan vectoriel de $\mathbb{E}$, tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires et éléments de $\mathbb{F}$ forment une base de $\mathbb{F}$.

2 Sous-espaces vectoriels en dimension finie

2.1 Inclusion et dimension

Théorème 12 Sev d'un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie
Soit $\mathbb{E}$ un K-ev de dimension finie.
Alors tous ses sev $\mathbb{F}$ sont aussi de dimension finie et vérifient : $\dim(\mathbb{F}) \leq \dim(\mathbb{E})$.

Démonstration : Soit $\mathbb{F}$ un sev de $\mathbb{E}$.

• Si $\mathbb{F} = \{\overrightarrow{0}_{\mathbb{E}}\}$ alors $\mathbb{F}$ est de dimension finie et $\dim(\mathbb{F}) = 0 \leq \dim(\mathbb{E})$.

• Si $\mathbb{F} \neq \{\overrightarrow{0}_{\mathbb{E}}\}$. Dans ce cas il existe $\overrightarrow{u}_1 \neq \overrightarrow{0}_{\mathbb{E}}$, et donc $(\overrightarrow{u}_1)$ libre dans $\mathbb{F}$.

Si ce n'est pas une base de $\mathbb{F}$ alors on prend $\overrightarrow{u}_2 \in \mathbb{F}$ tel que $\overrightarrow{u}_2 \notin \text{Vect}(\overrightarrow{u}_1)$, et on obtient $(\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2)$ famille libre dans $\mathbb{F}$.

Ainsi de suite, si on a $(\overrightarrow{u}_1, \ldots, \overrightarrow{u}_k)$ famille libre de $\mathbb{F}$ qui n'est pas une base de $\mathbb{F}$ alors on peut trouver $\overrightarrow{u}_{k+1} \in \mathbb{F}$ tel que $\overrightarrow{u}_{k+1} \notin \text{Vect}(\overrightarrow{u}_1, \ldots, \overrightarrow{u}_k)$, et on obtient $(\overrightarrow{u}_1, \ldots, \overrightarrow{u}_k, \overrightarrow{u}_{k+1})$ libre.

Au bout d'un nombre fini d'itérations :
- on obtient une base finie de $\mathbb{F}$, donc $\mathbb{F}$ est de dimension finie ;
- ou dans le pire des cas on arrive à $(\overrightarrow{u}_1, \ldots, \overrightarrow{u}_n)$ famille libre dans $\mathbb{F}$ avec $n = \dim(\mathbb{E})$. Cette famille est aussi libre dans $\mathbb{E}$, et c'est donc une base de $\mathbb{E}$ et donc une base de $\mathbb{F}$ (ie qu'on est dans le cas où $\mathbb{E} = \mathbb{F}$). Dans ce cas aussi $\mathbb{F}$ est de dimension finie.

CQFD □

Définition 13 Hyperplan
Soient $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-ev de dimension fine et $\mathbb{F}$ un sev de $\mathbb{E}$.
On dit que $\mathbb{F}$ est un hyperplan de $\mathbb{E}$, lorsque $\dim(\mathbb{F}) = \dim(\mathbb{E}) - 1$.

***Exemple* :** Dans $\mathbb{K}^2$, les hyperplans sont les droites vectorielles. Dans $\mathbb{K}^3$, les hyperplans sont les plans vectoriels.

Théorème 14 Inclusion-Dimension
Soient $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-ev et $\mathbb{F}$, $\mathbb{G}$ deux sev de $\mathbb{E}$.

1. Si $\mathbb{G}$ est de dimension finie et $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{G}$, alors $\mathbb{F}$ est de dimension finie et $\dim(\mathbb{F}) \leq \dim(\mathbb{G})$.
2. Si $\mathbb{G}$ est de dimension finie et $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{G}$, alors :

$$\mathbb{F} = \mathbb{G} \Longleftrightarrow \dim(\mathbb{F}) = \dim(\mathbb{G})$$

⚠ ATTENTION : il n'y a pas de réciproque pour le premier point ! Si $\dim(\mathbb{F}) \leq \dim(\mathbb{G})$, on ne peut absolument pas dire que $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{G}$. Par exemple, considérer $\mathbb{F} = \text{Vect}\left[(2^n)_{n\in\mathbb{N}}\right]$ et $\mathbb{G} = \text{Vect}\left[(1,0,1);(1,1,0)\right]$.

2.2 Rang d'une famille de vecteurs

Le rang d'une famille de vecteurs est défini comme suit.

Définition 15 Rang d'une famille de vecteurs
Soient $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-ev et $\mathscr{F} = \left(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p\right)$ une famille finie de vecteurs de $\mathbb{E}$.
On appelle rang de $\mathscr{F}$ le nombre entier naturel défini par : $\operatorname{rg}(\mathscr{F}) = \dim\left(\operatorname{Vect}[\mathscr{F}]\right)$.

Le rang permet d'étudier l'espace engendré par les vecteurs.

Théorème 16 Propriétés du rang d'une famille de vecteurs
Soient $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-ev et $\mathscr{F} = \left(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p\right)$ une famille finie de vecteurs de $\mathbb{E}$.

1. $\operatorname{rg}(\mathscr{F}) \leq \min\left(\operatorname{Card}(\mathscr{F}), \dim(\mathbb{E})\right)$;
2. $\operatorname{rg}(\mathscr{F}) = 0 \iff$ tous les vecteurs de $\mathscr{F}$ sont nuls
3. $\operatorname{rg}(\mathscr{F}) = \operatorname{Card}(\mathscr{F}) \iff \mathscr{F}$ libre ;
4. $\operatorname{rg}(\mathscr{F}) = \dim(\mathbb{E}) \iff \mathscr{F}$ génératrice de $\mathbb{E}$;
5. si $\operatorname{Card}(\mathscr{F}) = \dim(\mathbb{E}) = n$:

$$\operatorname{rg}(\mathscr{F}) = n \iff \mathscr{F} \text{ est une base de } \mathbb{E}$$

Pour simplifier les calculs, on dispose des formules suivantes.

Proposition 17 Règles de calcul du rang d'une famille de vecteurs
Soient $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ deux $\mathbb{K}$-ev et $\mathscr{F} = \left(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p\right)$ une famille finie de vecteurs de $\mathbb{E}$.

1. Si $\alpha \neq 0$: $\operatorname{rg}\left(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_{p-1}, \vec{u}_p\right) = \operatorname{rg}\left(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_{p-1}, \alpha.\vec{u}_p\right)$.
2. $\operatorname{rg}\left(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_{p-1}, \vec{0}_{\mathbb{E}}\right) = \operatorname{rg}\left(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_{p-1}\right)$.
3. Si $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{K}^{n-1}$: $\operatorname{rg}\left(\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_{p-1}}, \overrightarrow{u_p}\right) = \operatorname{rg}\left(\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_{p-1}}, \overrightarrow{u_p} + \sum_{k=1}^{p-1} \lambda_k.\overrightarrow{u_k}\right)$.
4. Si $\overrightarrow{u_p}$ est CL de la famille $\left(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_{p-1}\right)$: $\operatorname{rg}\left(\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_{p-1}}, \overrightarrow{u_p}\right) = \operatorname{rg}\left(\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_{p-1}}\right)$.

On peut remarquer que ce sont les mêmes propriétés que celles du Vect.

Pour calculer le rang d'une famille de vecteurs, il faut donc extraire de $\mathscr{F}$ une base de $\operatorname{Vect}(\mathscr{F})$ (tout autre méthode n'est pas au programme).

Exemple **:** $\operatorname{rg}\left[(1,0,1); (1,1,0); (0,-1,1)\right] = 2$.

2.3 Somme de deux sous-espaces vectoriels

Définition 18 Somme de deux parties de $\mathbb{E}$
On considère $\mathbb{F}_1$ et $\mathbb{F}_2$ deux parties de $\mathbb{E}$.
On appelle somme de $\mathbb{F}_1$ et $\mathbb{F}_2$, notée $\mathbb{F}_1+\mathbb{F}_2$, la partie de $\mathbb{E}$ suivante :

$$\mathbb{F}_1+\mathbb{F}_2=\left\{\overrightarrow{x}=\overrightarrow{u_1}+\overrightarrow{u_2}\Big/\ \overrightarrow{u_1}\in\mathbb{F}_1 \text{ et } \overrightarrow{u_2}\in\mathbb{F}_2\right\}$$

On a donc $\overrightarrow{x}\in\mathbb{F}_1+\mathbb{F}_2$ si et seulement si il existe $\left(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right)\in\mathbb{F}_1\times\mathbb{F}_2$ tel que $\overrightarrow{x}=\overrightarrow{u_1}+\overrightarrow{u_2}$.

En général il n'y pas unicité des vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ tels que $\overrightarrow{x}=\overrightarrow{u_1}+\overrightarrow{u_2}$, comme le montre l'exemple suivant.

Exemple **:** Dans $\mathbb{R}^3$, on note $\mathbb{F}_1=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\big/\ x+y-z=0\right\}$ et $\mathbb{F}_2=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\big/\ z=0\right\}$.
Alors $(1,1,1)=\underbrace{(0,1,1)}_{\in\mathbb{F}_1}+\underbrace{(1,0,0)}_{\in\mathbb{F}_2}=\underbrace{(1,0,1)}_{\in\mathbb{F}_1}+\underbrace{(0,1,0)}_{\in\mathbb{F}_2}$.

On a les cas particuliers suivants.

Proposition 19 On a $\mathbb{E}+\mathbb{E}=\mathbb{E}$, $\mathbb{E}+\left\{\overrightarrow{0_E}\right\}=\left\{\overrightarrow{0_E}\right\}+\mathbb{E}=\mathbb{E}$ et $\left\{\overrightarrow{0_E}\right\}+\left\{\overrightarrow{0_E}\right\}=\left\{\overrightarrow{0_E}\right\}$.

Théorème 20 Propriétés d'une somme de deux sev
On suppose que $\mathbb{F}_1$ et $\mathbb{F}_2$ sont des sev de $\mathbb{E}$. Alors :

1. $\mathbb{F}_1+\mathbb{F}_2$ est un sev de $\mathbb{E}$, contenant $\mathbb{F}_1$ et $\mathbb{F}_2$;
2. c'est le plus petit sev de $\mathbb{E}$ contenant $\mathbb{F}_i$ et $\mathbb{F}_2$, c'est-à-dire que si $\mathbb{G}$ est un sev de $\mathbb{E}$ vérifant $\mathbb{F}_1\subseteq\mathbb{G}$ et et $\mathbb{F}_2\subseteq\mathbb{G}$, alors $\mathbb{F}_1+\mathbb{F}_2\subseteq\mathbb{G}$.

Théorème 21 Famille génératrice d'une somme de deux sev
Soient $\mathbb{F}_1$ et $\mathbb{F}_2$ deux sev de $\mathbb{E}$. On suppose qu'on a $\mathscr{F}$ une famille génératrice de $\mathbb{F}_1$ et $\mathscr{G}$ une famille génératrice de $\mathbb{F}_2$. Alors $\mathscr{F}\cup\mathscr{G}$ est une famille génératrice de $\mathbb{F}_1+\mathbb{F}_2$:

$$\mathrm{Vect}(\mathscr{F})+\mathrm{Vect}(\mathscr{G})=\mathrm{Vect}(\mathscr{F}\cup\mathscr{G})$$

Exemple **:** Dans $\mathbb{R}^3$:

$$\mathrm{Vect}\left[(1,0,1);(0,1,1)\right]+\mathrm{Vect}\left[(1,0,0);(0,1,0)\right]=\mathrm{Vect}\left[(1,0,1);(0,1,1);(1,0,0);(0,1,0)\right]$$

⚠ ATTENTION : ce résultat est faux avec des familles libres, comme le montre le contre-exemple suivant.

Exemple **:** $\mathscr{F}=\left(\underbrace{(1,0,1)}_{=\overrightarrow{u_1}};\underbrace{(0,1,1)}_{=\overrightarrow{u_2}}\right)$ et $\mathscr{G}=\left(\underbrace{(1,0,0)}_{=\overrightarrow{u_3}};\underbrace{(0,1,0)}_{=\overrightarrow{u_4}}\right)$ sont libres (car composées de deux vecteurs non colinéaires), mais $\mathscr{F}\cup\mathscr{G}=\left(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},\overrightarrow{u_3},\overrightarrow{u_4}\right)$ ne l'est plus car :

$$\overrightarrow{u_1}-\overrightarrow{u_2}=(1,-1,0)=\overrightarrow{u_3}-\overrightarrow{u_4}$$

Pour avoir de meilleures propriétés, on a besoin d'une notion plus forte : la notion de somme directe.

Définition 22 Somme directe de deux sev
Soient $\mathbb{F}_1$ et $\mathbb{F}_2$ deux sev de $\mathbb{E}$.
On dit que $\mathbb{F}_1$ et $\mathbb{F}_2$ sont en somme directe, ou que la somme $\mathbb{F}_1+\mathbb{F}_2$ est directe, lorsque $\mathbb{F}_1\cap\mathbb{F}_2=\{\overrightarrow{0_E}\}$.
Dans ce cas $\mathbb{F}_1+\mathbb{F}_2$ est notée $\mathbb{F}_1\oplus\mathbb{F}_2$.

Si la somme est directe, on a unicité de la décomposition d'un vecteur en somme d'un vecteur de $\mathbb{F}_1$ et d'un vecteur de $\mathbb{F}_2$: c'est en même une caractérisation.

Théorème 23 Première caractérisation d'une somme directe
Soient $\mathbb{F}_1$ et $\mathbb{F}_2$ deux sev de $\mathbb{E}$. Alors :
$\mathbb{F}_1$ et $\mathbb{F}_2$ sont en somme directe si, et seulement si, tout vecteur $\overrightarrow{x}\in\mathbb{F}_1+\mathbb{F}_2$ s'écrit de manière unique $\overrightarrow{x}=\overrightarrow{f_1}+\overrightarrow{f_2}$ avec $\overrightarrow{f_1}\in\mathbb{F}_1$ et $\overrightarrow{f_2}\in\mathbb{F}_2$.

On peut restreindre la condition de l'unicité de la décomposition au vecteur nul.

Corollaire 24 Somme directe et décomposition du vecteur nul
Soient $\mathbb{F}_1$ et $\mathbb{F}_2$ deux sev de $\mathbb{E}$. Alors :
$\mathbb{F}_1$ et $\mathbb{F}_2$ sont en somme directe si, et seulement si :

$$\forall\left(\overrightarrow{f_1},\overrightarrow{f_2}\right)\in\mathbb{F}_1\times\mathbb{F}_2,\quad \overrightarrow{f_1}+\overrightarrow{f_2}=\overrightarrow{0}\Longrightarrow\overrightarrow{f_1}=\overrightarrow{f_2}=\overrightarrow{0}$$

ie que la seule décomposition de $\overrightarrow{0}$ dans $\mathbb{F}_1+\mathbb{F}_2$ est $\overrightarrow{0}=\overrightarrow{0}+\overrightarrow{0}$.

Si la somme est directe, l'union d'une famille libre de $\mathbb{F}_1$ et d'une famille libre de $\mathbb{F}_2$ donne une famille libre.

Théorème 25 Famille libre d'une somme directe
Soient $\mathbb{F}_1$ et $\mathbb{F}_2$ deux sev de $\mathbb{E}$, en somme directe. Alors l'union d'une famille libre de $\mathbb{F}_1$ et d'une famille libre de $\mathbb{F}_2$ donne une famille libre de $\mathbb{F}_1+\mathbb{F}_2$.

On en déduit la seconde caractérisation des sommes directes.

Corollaire 26 Seconde caractérisation d'une somme directe
Soient $\mathbb{F}_1$ et $\mathbb{F}_2$ deux sev de $\mathbb{E}$. Alors :
$\mathbb{F}_1$ et $\mathbb{F}_2$ sont en somme directe si, et seulement si, l'union d'une base de $\mathbb{F}_1$ et d'une base de $\mathbb{F}_2$ donne une base de $\mathbb{F}_1+\mathbb{F}_2$.
Ce résultat est alors vrai pour toutes les bases de $\mathbb{F}_1$ et $\mathbb{F}_2$.

On verra, tout au long de l'année, qu'il est fréquent dans les résultats d'algèbre linéaire, qu'une propriété vraie sur un cas particulier, s'étende automatiquement au cas général (ici : si la propriété est vraie pour une base de $\mathbb{F}_1$ et $\mathbb{F}_2$, elle est alors vraie pour toutes les bases de $\mathbb{F}_1$ et $\mathbb{F}_2$).

Définition 27 Sous-espaces vectoriels supplémentaires
Soient $\mathbb{F}_1$ et $\mathbb{F}_2$ deux sev de $\mathbb{E}$.
On dit qu'ils sont supplémentaires dans $\mathbb{E}$ lorsque $\mathbb{F}_1 \oplus \mathbb{F}_2 = \mathbb{E}$.

⚠ ATTENTION : ne pas confondre avec la notion de complémentaire (qui ne donne pas un sev) !

Théorème 28 Caractérisations des sous-espaces vectoriels supplémentaires
Soient $\mathbb{F}_1$ et $\mathbb{F}_2$ deux sev de $\mathbb{E}$. On a équivalence de :

1. $\mathbb{F}_1$ et $\mathbb{F}_2$ sont supplémentaires dans $\mathbb{E}$: $\mathbb{E} = \mathbb{F}_1 \oplus \mathbb{F}_2$;
2. $\mathbb{F}_1 + \mathbb{F}_2 = \mathbb{E}$ et $\mathbb{F}_1 \cap \mathbb{F}_2 = \left\{\overrightarrow{0_E}\right\}$;
3. l'union d'une base de $\mathbb{F}_1$ et d'une base de $\mathbb{F}_2$ donne une base de $\mathbb{E}$;
4. tout vecteur $\overrightarrow{e} \in \mathbb{E}$ se décompose de manière unique sous la forme $\overrightarrow{e} = \overrightarrow{f_1} + \overrightarrow{f_2}$, avec $\overrightarrow{f_1} \in \mathbb{F}_1$ et $\overrightarrow{f_2} \in \mathbb{F}_2$.

Dans ce cas l'union de n'importe quelle base de $\mathbb{F}_1$, avec n'importe quelle base de $\mathbb{F}_2$ donne une base de $\mathbb{E}$; on dit qu'on a une **base de $\mathbb{E}$ adaptée** à la somme directe $\mathbb{E} = \mathbb{F}_1 \oplus \mathbb{F}_2$.

On peut retenir qu'en coupant une base de $\mathbb{E}$ en deux sous-familles $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$, alors $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$ engendrent deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{E}$ (d'après le point 3.).

***Exemple* :** $\mathbb{R}^2 = \text{Vect}\left[(1,0)\right] \oplus \text{Vect}\left[(0,1)\right]$, donc $\mathbb{F}_1 = \text{Vect}\left[(1,0)\right]$ et $\mathbb{F}_2 = \text{Vect}\left[(0,1)\right]$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^2$.

Rédaction : Dans la majorité des cas, on utilise le point 4. pour montrer que $\mathbb{F}_1$ et $\mathbb{F}_2$ sont supplémentaires dans $\mathbb{E}$.

On a donc deux choses à démontrer : l'existence et l'unicité de la décomposition de tout vecteur de $\mathbb{E}$. Il est plus facile commencer par vérifier l'unicité de la décomposition (si elle existe), puis de vérifier l'existence d'au moins une décomposition (en en donnant un exemple).

On rédige cette démonstration par **analyse-synthèse** :

• On montre que $\mathbb{F}_1$ et $\mathbb{F}_2$ sont deux sev de $\mathbb{E}$. On a donc $\mathbb{F}_1 + \mathbb{F}_2 \subseteq \mathbb{E}$.

• On se donne $\overrightarrow{e} \in \mathbb{E}$ fixé quelconque.

• **ANALYSE :** on suppose qu'on a trouvé au moins une décomposition de de $\overrightarrow{e}$: $\overrightarrow{e} = \overrightarrow{f_1} + \overrightarrow{f_2}$, avec $\overrightarrow{f_1} \in \mathbb{F}_1$ et $\overrightarrow{f_2} \in \mathbb{F}_2$.
$\hookrightarrow$ *On veut montrer que cette décomposition est unique ; pour cela on cherche à calculer $\overrightarrow{f_1}$ et $\overrightarrow{f_2}$ en fonction de $\overrightarrow{e}$.*
À ce stade, on a montré que $\mathbb{F}_1$ et $\mathbb{F}_2$ sont en somme directe ; donc $\mathbb{F}_1 \oplus \mathbb{F}_2 \subseteq \mathbb{E}$.

• **SYNTHESE :**
$\hookrightarrow$ *On veut montrer que $\overrightarrow{e}$ a au moins une décomposition ; pour cela on utilise les formules obtenues dans la partie analyse.*
On définit donc $\overrightarrow{f_1}$ et $\overrightarrow{f_2}$ en fonction de $\overrightarrow{e}$, à partir des formules obtenues dans la partie analyse. Il reste à vérifier que ceci donne bien une décomposition de $\overrightarrow{e}$ dans $\mathbb{F}_1 \oplus \mathbb{F}_2$, c'est-à-dire trois points :
(i) $\overrightarrow{f_1} \in \mathbb{F}_1$; (ii) $\overrightarrow{f_2} \in \mathbb{F}_2$ et (iii) $\overrightarrow{f_1} + \overrightarrow{f_2} = \overrightarrow{e}$.
On alors montré que $\mathbb{E} \subseteq \mathbb{F}_1 \oplus \mathbb{F}_2$; et donc par double-inclusion : $\mathbb{E} = \mathbb{F}_1 \oplus \mathbb{F}_2$.

La synthèse n'est qu'une simple vérification, mais elle est indispensable dans le raisonnement, il ne faut donc pas la négliger ! Considérer par exemple $\mathbb{E} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{F}_1 = \left\{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \middle/ \forall n \in \mathbb{N},\ a_n = a_{n+1} + a_{n+2}\right\}$ et $\mathbb{F}_2 = \left\{(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \middle/ \forall n \in \mathbb{N},\ b_{n+1} + b_{n+2} = 0\right\}$: la somme est directe mais différente de $\mathbb{E}$!

2.4 Somme $k \geq 2$ sous-espaces vectoriels

Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $k \geq 2$.

Définition 29 Somme de k parties de $\mathbb{E}$
On considère k parties de $\mathbb{E}$ notés $\mathbb{F}_1, \mathbb{F}_2, \ldots, \mathbb{F}_k$.
On appelle somme de $\mathbb{F}_1, \mathbb{F}_2, \ldots, \mathbb{F}_p$, notée $\mathbb{F}_1 + \mathbb{F}_2 + \cdots + \mathbb{F}_p = \sum_{k=1}^{p} \mathbb{F}_k$, la partie de $\mathbb{E}$ suivante :

$$\mathbb{F}_1 + \mathbb{F}_2 + \cdots + \mathbb{F}_k = \sum_{j=1}^{k} \mathbb{F}_j = \left\{\overrightarrow{x} = \overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2} + \cdots + \overrightarrow{u_k} \middle/ \overrightarrow{u_1} \in \mathbb{F}_1 \text{ et } \overrightarrow{u_2} \in \mathbb{F}_2 \text{ et } \ldots \text{ et } \overrightarrow{u_k} \in \mathbb{F}_k\right\}$$

On a donc $\overrightarrow{x} \in \mathbb{F}_1 + \mathbb{F}_2 + \cdots + \mathbb{F}_k = \sum_{j=1}^{k} \mathbb{F}_j$ si et seulement si il existe $(\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_k}) \in \mathbb{F}_1 \times \cdots \times \mathbb{F}_k$ tel que $\overrightarrow{x} = \sum_{j=1}^{k} \overrightarrow{u_j}$.

De même que dans le cas $k = 2$, il n'y a en général pas unicité des vecteurs $\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_k}$ tels que $\overrightarrow{x} = \sum_{j=1}^{k} \overrightarrow{u_j}$.

Théorème 30 Propriétés d'une somme de k sev
On suppose que $\mathbb{F}_1, \mathbb{F}_2, \ldots, \mathbb{F}_k$ sont des sev de $\mathbb{E}$. Alors :

1. $\mathbb{F}_1 + \mathbb{F}_2 + \cdots + \mathbb{F}_p = \sum_{j=1}^{k} \mathbb{F}_j$ est un sev de $\mathbb{E}$, contenant les $\mathbb{F}_i$, pour $i \in [\![1, k]\!]$;
2. c'est le plus petit sev de $\mathbb{E}$ contenant les $\mathbb{F}_i$, pour $i \in [\![1, k]\!]$, c'est-à-dire que si $\mathbb{G}$ est un sev de $\mathbb{E}$ vérifiant $\mathbb{F}_1 \subseteq \mathbb{G}$ et ... et $\mathbb{F}_k \subseteq \mathbb{G}$, alors $\mathbb{F}_1 + \mathbb{F}_2 + \cdots + \mathbb{F}_k \subseteq \mathbb{G}$.

On peut aussi définir la notion de k sous-espaces en somme directe.

Définition 31 Somme directe de k sous-espaces vectoriels
Soient $\mathbb{F}_1, \ldots, F_k$ des sev de $\mathbb{E}$.

On dit que $\mathbb{F}_1, \ldots, F_k$ sont en somme directe lorsque pour tout $\overrightarrow{x} \in \mathbb{F}_1 + \mathbb{F}_2 + \cdots + \mathbb{F}_k = \sum_{j=1}^{k} \mathbb{F}_j$,

il existe de **manière unique** $(\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_k}) \in \mathbb{F}_1 \times \cdots \times \mathbb{F}_k$ tel que $\overrightarrow{x} = \sum_{j=1}^{k} \overrightarrow{u_j}$.

Dans ce cas $\mathbb{F}_1 + \mathbb{F}_2 + \cdots + \mathbb{F}_k$ est notée $\mathbb{F}_1 \oplus \mathbb{F}_2 \oplus \cdots \oplus \mathbb{F}_k = \bigoplus_{j=1}^{k} \mathbb{F}_j$

Pour $k = 2$ on retrouve bien la notion de deux sev en somme directe (grâce au théorème 23).

On a les caractérisations suivantes.

Théorème 32 Caractérisations des sommes directes de k sev
Soient $\mathbb{F}_1, \ldots, F_k$ des sev de $\mathbb{E}$. On a équivalence de :

1. $\mathbb{F}_1, \ldots, F_k$ sont en somme directe ;
2. Pour tout $(\overrightarrow{f_1}, \ldots, \overrightarrow{f_p}) \in \mathbb{F}_1 \times \cdots \times \mathbb{F}_p$, $\overrightarrow{f_1} + \cdots + \overrightarrow{f_p} = \overrightarrow{0} \implies \overrightarrow{f_1} = \cdots = \overrightarrow{f_p} = \overrightarrow{0}$;
3. l'union d'une base de $\mathbb{F}_1$, d'une base de $\mathbb{F}_2$, ..., et d'une base de $\mathbb{F}_k$, donne une base de $\mathbb{F}_1 + \mathbb{F}_2 + \cdots + F_k$.

Ce dernier point est alors vrai pour toutes les bases de $\mathbb{F}_1, \mathbb{F}_2, \ldots, F_k$.

On en déduit le corollaire suivant.

Corollaire 33 Critère pour que $\mathbb{E} = \bigoplus_{j=1}^{k} \mathbb{F}_j$
Soient $\mathbb{F}_1, \ldots, F_k$ des sev de $\mathbb{E}$.

Alors $\mathbb{E} = \bigoplus_{j=1}^{k} \mathbb{F}_j$ si, et seulement si, l'union d'une base de $\mathbb{F}_1$, d'une base de $\mathbb{F}_2$, ..., et d'une base de $\mathbb{F}_k$, donne une base de $\mathbb{E}$.
Ce est alors vrai pour toutes les bases de $\mathbb{F}_1, \mathbb{F}_2, \ldots, F_k$: on dit alors que la base de $\mathbb{E}$ obtenue par union de ces bases est une base adaptée à la somme directe.

2.5 Sommes et sommes directes en dimension finie

Si $\mathscr{B} = \left(\overrightarrow{u}_1, \dots, \overrightarrow{u}_p\right)$ et $\mathscr{F} = \left(\overrightarrow{v}_1, \dots, v_q\right)$ sont deux familles de vecteurs d'un même espace vectoriel $\mathbb{E}$:

$$\mathscr{B} \cup \mathscr{C} = \left(\overrightarrow{u}_1, \dots, \overrightarrow{u}_p, \overrightarrow{v}_1, \dots, \overrightarrow{v}_q\right)$$

On a donc la formule : $\text{Card}(\mathscr{B} \cup \mathscr{C}) = \text{Card}(\mathscr{B}) + \text{Card}(\mathscr{C})$.

⚠ Attention de ne pas confondre avec la formule d'inclusion/exclusion sur les ensembles :

$$\text{Card}(B \cup C) = \text{Card}(B) + \text{Card}(C) - \text{Card}(B \cap C)$$

On commence par les premières formules simples sur la dimension d'une somme de sev.

Théorème 34 Sommes de sev et dimension
Soient $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-ev, et $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$ deux sev de $\mathbb{E}$ de dimension finie.

1. $\mathbb{F} + \mathbb{G}$ est un sev de $\mathbb{E}$ de dimension finie et : $\dim(\mathbb{F} + \mathbb{G}) \leq \dim(\mathbb{F}) + \dim(\mathbb{G})$;
2. si $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$ sont en somme directe, alors $\mathbb{F} \oplus \mathbb{G}$ est un sev de $\mathbb{E}$ de dimension finie et : $\dim(\mathbb{F} \oplus \mathbb{G}) = \dim(\mathbb{F}) + \dim(\mathbb{G})$.

Un résultat fondamental : l'existence de supplémentaires de dimension finie.

Théorème 35 Existence d'un supplémentaire en dimension finie
Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie. Alors tout sev $\mathbb{F}$ de $\mathbb{E}$ admet des supplémentaires $\mathbb{G}$ dans $\mathbb{E}$ (ie $\mathbb{E} = \mathbb{F} \oplus \mathbb{G}$), et ils vérifient $\dim(\mathbb{G}) = \dim(\mathbb{E}) - \dim(\mathbb{F})$.

⚠ ATTENTION : il n'y pas unicité d'un supplémentaire mais seulement de sa dimension.

Ce n'est pas au programme d'ECS première année : le résultat est encore vrai en dimension infinie.

De ces deux théorèmes on déduit une formule générale sur la dimension d'une somme de sev.

Théorème 36 Formule de Grassmann
Soient $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-ev, et $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$ deux sev de $\mathbb{E}$ de dimension finie. On a :

$$\dim(\mathbb{F} + \mathbb{G}) = \dim(\mathbb{F}) + \dim(\mathbb{G}) - \dim(\mathbb{F} \cap \mathbb{G})$$

Démonstration : On sait que $\mathbb{F}$ est de dimension finie et que $\mathbb{F} \cap \mathbb{G}$ est un sev de $\mathbb{F}$. $\mathbb{F} \cap \mathbb{G}$ a donc des supplémentaires dans $\mathbb{F}$.

Soit $\mathbb{H}$ un supplémentaire de $\mathbb{F} \cap \mathbb{G}$ dans $\mathbb{F}$: $\mathbb{F} = (\mathbb{F} \cap \mathbb{G}) \oplus \mathbb{H}$. On a donc $\dim(\mathbb{H}) = \dim(\mathbb{F}) - \dim(\mathbb{F} \cap \mathbb{G})$.

Montrons que $\mathbb{F}+\mathbb{G}=\mathbb{H}\oplus\mathbb{G}$:
• il est clair que $\mathbb{H}+\mathbb{G}\subseteq\mathbb{F}+\mathbb{G}$ puisque $\mathbb{H}\subseteq\mathbb{F}$. Réciproquement si $\overrightarrow{f}\in\mathbb{F}$ et $\overrightarrow{g}\in\mathbb{G}$, on peut écrire $\overrightarrow{f}=\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$ avec $\overrightarrow{a}\in\mathbb{F}\cap\mathbb{G}$ et $\overrightarrow{b}\in\mathbb{H}$. On obtient $\overrightarrow{f}+\overrightarrow{g}=\overrightarrow{b}+\overrightarrow{a}+\overrightarrow{g}\in\mathbb{H}+\mathbb{G}$ puisque $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{g}\in\mathbb{G}$;
• puisque $\mathbb{H}\subseteq\mathbb{F}$, $\mathbb{G}\cap\mathbb{H}=\mathbb{G}\cap\mathbb{F}\cap\mathbb{H}=\{\overrightarrow{0}\}$.

On en déduit que :

$$\dim(\mathbb{F}+\mathbb{G})=\dim(\mathbb{H})+\dim(\mathbb{G})=\dim(\mathbb{F})-\dim(\mathbb{F}\cap\mathbb{G})+\dim(\mathbb{G})$$

CQFD □

Autre résultat important, la dimension finie donne une nouvelle caractérisation des sev supplémentaires.

Théorème 37 Caractérisation des sev supplémentaires
Soient $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, et $\mathbb{F}$, $\mathbb{G}$ deux sev de $\mathbb{E}$. On a équivalence des propositions :

1. $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$ sont supplémentaires dans $\mathbb{E}$: $\mathbb{E}=\mathbb{F}\oplus\mathbb{G}$;
2. $\mathbb{F}+\mathbb{G}=\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}\cap\mathbb{G}=\{\overrightarrow{0_E}\}$;
3. l'union d'une base de $\mathbb{F}$ et d'une base de $\mathbb{G}$ donne une base de $\mathbb{E}$ (c'est alors vrai pour toutes les bases) ;
4. tout vecteur $\overrightarrow{e}\in\mathbb{E}$ se décompose de manière unique sous la forme $\overrightarrow{e}=\overrightarrow{f}+\overrightarrow{g}$, avec $\overrightarrow{f}\in\mathbb{F}$ et $\overrightarrow{g}\in\mathbb{G}$;
5. $\mathbb{E}=\mathbb{F}+\mathbb{G}$ et $\dim(\mathbb{E})=\dim(\mathbb{F})+\dim(\mathbb{G})$;
6. $\mathbb{F}\cap\mathbb{G}=\{\overrightarrow{0}_{\mathbb{E}}\}$ et $\dim(\mathbb{E})=\dim(\mathbb{F})+\dim(\mathbb{G})$.

***Exemple* :** Dans $\mathbb{R}^3$, on considère $\mathbb{F}=\text{Vect}[(1,1,1)]$ et $\mathbb{G}=\{(x,y,a)\in\mathbb{R}^3/\ x+y+z=0\}=\text{Vect}\left[(1,0,-1);(0,1,-1)\right]$.
On a $\dim(\mathbb{F})+\dim(\mathbb{G})=3$ et $\mathbb{F}\cap\mathbb{G}=\{\overrightarrow{0}_{\mathbb{R}^3}\}$.

Dans le cas d'une somme directe de k sev de $\mathbb{E}$, on a la formule suivante.

Théorème 38 Dimension d'une somme directe de k sev de $\mathbb{E}$
Soient $\mathbb{F}_1,\ldots,F_k$ des sev de $\mathbb{E}$ en somme directe. On a :

$$\dim\left(\bigoplus_{j=1}^{k}\mathbb{F}_j\right)=\sum_{j=1}^{k}\dim(\mathbb{F}_j)$$

3 Exercices

Familles libres, génératrices, bases, dimension

Exercice 1 Les familles suivantes sont-elles des bases de $\mathbb{R}^3$?

$$\mathscr{F}_1 = \Big((0,1,2),(1,2,0),(2,0,1)\Big)$$
$$\mathscr{F}_2 = \Big((1,1,0),(2,0,1),(3,1,1),(1,0,2)\Big)$$

Exercice 2 On considère le sous-espace vectoriel $\mathbb{E}$ de $\mathbb{R}^4$ défini par

$$\mathbb{E} = \operatorname{Vect}\Big((1,-1,3,-3),(2,-2,4,-4),(3,-3,7,-7),(1,-1,1,-1)\Big).$$

1. Donner une base et la dimension de $\mathbb{E}$.
2. Déterminer un système d'équations cartésiennes de $\mathbb{E}$.
3. Etablir que $\mathbb{E} \subset \mathbb{F}$, où $\mathbb{F}$ est défini par $\mathbb{F} = \operatorname{Vect}\Big((1,0,1,-1),(0,1,2,-2),(1,0,0,0),(0,0,-1,1)\Big)$.
4. On pose $\mathbb{G} = \operatorname{Vect}\Big((1,0,0,1),(1,2,0,0)\Big)$. Vérifier que $\mathbb{E} \cap \mathbb{G} = \{0\}$.

Exercice 3 On note $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ l'ensemble des fonctions numériques définies sur $\mathbb{R}$. On pose :

$$\mathbb{E} = \left\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \big/ \ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = a\cos(x) + b\sin(x) + c \text{ où } (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\right\}$$

Montrer que $\mathbb{E}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et donner une base et sa dimension.

Exercice 4 Pour $\alpha > 0$, on note $\mathbb{F}_\alpha$ l'ensemble des fonctions de la forme :

$$x \longmapsto P(x)\mathrm{e}^{\alpha x} + Q(x)\mathrm{e}^{-\alpha x}$$

où P et Q sont des polynômes de degrés inférieurs ou égaux à 1.

1. Montrer que $\mathbb{F}_\alpha$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
2. Déterminer une base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{F}_\alpha$ et en déduire sa dimension.

Exercice 5 (Exemples de bases de polynômes)
1. Soient $P_1 = X^2+1$, $P_2 = X^2+X+1$ et $P_3 = X^2+X$. Montrer que (P_1,P_2,P_3) est une base de $\mathbb{K}_2[X]$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, on pose $P_k = (X+1)^{k+1} - X^{k+1}$. Montrer que $(P_0,\dots,P_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.
3. Montrer que $\mathbb{F} = \left\{P = aX^4 + (a+b)X \big/ \ (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\}$ est un sev de $\mathbb{E}$ et donner en une base.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, on pose $P_k = X^k(X+1)^{n-k}$. Montrer que $(P_0,\dots,P_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Exercice 6
1. Montrer que les $\mathbb{K}$-ev $T_n^+(\mathbb{K})$, $T_n^-(\mathbb{K})$, $\mathscr{S}_n(\mathbb{K}$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ sont de dimension finie et déterminer leur dimension.
2. Si $A = ((a_{ij}))_{1\leq i,j\leq n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ on note $\operatorname{Tr}(A) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{kk}$.

   On pose aussi $\mathbb{H} = \left\{A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \big/ \ \operatorname{Tr}(A) = 0\right\}$. Montrer que $\mathbb{H}$ est un sev de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et déterminer sa dimension.

Rang d'une famille de vecteurs

Exercice 7 Soient $\left(\overrightarrow{u_1},\dots,\overrightarrow{u_n}\right)$ famille de vecteurs de $\mathbb{E}$ $\mathbb{K}$-ev, et $p \in [\![1,n]\!]$.
Montrer que :

$$\operatorname{rg}\left(\overrightarrow{u_1},\dots,\overrightarrow{u_n}\right) \leq \operatorname{rg}\left(\overrightarrow{u_1},\dots,\overrightarrow{u_p}\right) + n - p$$

Sommes directes et sous-espaces supplémentaires

Exercice 8 Soient $\mathbb{E} = \left\{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{K}^n;\ \sum_{k=1}^{n} x_k = 0\right\}$ et $\mathbb{F} = \{(\lambda,\lambda,\dots,\lambda);\ \lambda \in \mathbb{K}\}$.

1. Montrer que $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{K}^n$.
2. Déterminer une base de $\mathbb{E}$ et de $\mathbb{F}$.

Exercice 9 On note $\mathbb{E} = \mathbb{K}[X]$ le $\mathbb{K}$-ev des polynômes à coefficients réels.

1. Soit $Q \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que $\mathbb{G} = \left\{P \in \mathbb{E} /\ Q|P\right\}$ est un sev de $\mathbb{E}$ et déterminer en un supplémentaire (penser à la division euclidienne).
2. Pour a et b réels distincts, on pose $\mathbb{E}_a = \left\{P \in \mathbb{E} /\ (X-a)|P\right\}$ et $\mathbb{E}_b = \left\{P \in \mathbb{E} /\ (X-b)|P\right\}$. Vérifier que $\mathbb{E}_a$ et $\mathbb{E}_b$ sont des sev de $\mathbb{E}$ puis que $\mathbb{E} = \mathbb{E}_a + \mathbb{E}_b$ (pour cela trouver $(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$ tels que $\lambda(X-a) + \mu(X-b) = 1$).
   La somme est-elle directe ?

Exercice 10 On considère le $\mathbb{K}$-ev $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ des matrices carrées d'ordre n.
On rappelle que $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ désigne l'ensemble des matrices carrées symétriques d'ordre n, et que $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ désigne l'ensemble des matrices carrées antisymétriques d'ordre n.
Montrer que $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ sont des sev supplémentaires de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 11 Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ centré en 0. On note $\mathbb{R}^I$ l'ensemble des fonctions numériques définies sur I. On pose :

$$\mathscr{A} = \left\{f \in \mathbb{R}^I \big/ f \text{ paire sur } I\right\} \qquad \text{et} \qquad \mathscr{B} = \left\{f \in \mathbb{R}^I \big/ f \text{ impaire sur } I\right\}$$

Montrer que $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^I$.

Exercice 12 On note $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ l'ensemble des fonctions numériques.
Soient $\mathbb{E} = \left\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \Big/ f(0) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = f(\pi)\right\}$ et $\mathbb{F} = \operatorname{Vect}\left(x \mapsto \cos(x), x \mapsto \sin(x)\right)$.

1. Montrer que $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.
2. Vérifier que $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \mathbb{E} \oplus \mathbb{F}$.

Exercice 13 Déterminer un supplémentaire dans $\mathbb{R}^3$ de $\mathbb{F} = \operatorname{Vect}\Big((0,1,1),(1,0,2)\Big)$.

Exercice 14 On se donne un entier naturel $n \geq 3$, on note $\mathbb{E}$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$.
Montrer que
$\mathbb{F} = \left\{P \in \mathbb{R}_n[X] \big/ X^3|P\right\}$ et $\mathbb{G} = \operatorname{Vect}\left[X(X-1),(X-1)(X-2),X(X-2)\right]$ sont des sev supplémentaires de $\mathbb{E}$.

Exercice 15 On note $\mathbb{E}$ l'ensemble des $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = u_{n+2} + u_{n+1} + 2u_n$, $\mathbb{F}$ l'ensemble des $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que : $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = 2a_n$ et $\mathbb{G}$ l'ensemble des $(b_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que : $\forall n \in \mathbb{N},\quad b_{n+2} = -b_{n+1} - b_n$.

1. Vérifier que $\mathbb{E}$, $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$ sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.
2. Déterminer une base et la dimension de $\mathbb{F}$ et de $\mathbb{G}$.
3. Déterminer $\dim(\mathbb{E})$ et en déduire que : $\mathbb{E} = \mathbb{F} \oplus \mathbb{G}$. Donner alors une base de $\mathbb{E}$.
4. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 0$, $u_2 = 2$ et : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+3} = u_{n+2} + u_{n+1} + 2u_n$.
   Déterminer l'expression de u_n en fonction de n.

Exercice 16 Soient $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, D une droite vectorielle et $\mathbb{H}$ un hyperplan.
Si $D \not\subseteq \mathbb{H}$, alors D et $\mathbb{H}$ sont supplémentaires dans $\mathbb{E}$.