Exercices donnés à l'oral de HEC

(30 minutes de préparation)
Lire tout l'énoncé avant de résoudre et chercher les liens entre les questions;
Si on sèche, noter les pistes et les proposer au jury.

Questions avec préparation.

1. A tout triplet de nombres réels (a, b, c) , on associe la matrice

$$M(a,b,c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix}$$

   a) Une telle matrice $M(a,b,c)$ est-elle diagonalisable ?
   b) Calculer $(M(a,b,c) - I)^n$ pour tout n entier naturel non nul
   c) Déterminer M^n en fonction de I , M et M^2 pour $n \in \mathbb{N}$ puis pour $n \in \mathbb{Z}$

2. a) La matrice $A = \begin{pmatrix} 13 & -9 & 45 \\ -3 & 3 & -11 \\ -3 & 2 & -10 \end{pmatrix}$,est -elle diagonalisable ?
   b) Déterminer P inversible telle que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} = T$

3. Soit t un nombre réel et $A(t)$ la matrice :

$$A(t) = \begin{pmatrix} 1-t & -t & 0 \\ -t & 1-t & 0 \\ -t & t & 1-2t \end{pmatrix}$$

   On note $\mathcal{M}$ l'ensemble de ces matrices quand t décrit $\mathbb{R}$.

   a) Montrer que $\mathcal{M}$ est stable par produit matricielle.
   b) Déterminer les valeurs de t pour lesquelles $A(t)$ est inversible .
   Montrer que $A(t)^{-1}$ appartient encore à $\mathcal{M}$
   c) résoudre l'équation $X^2 = A\left(\frac{-3}{2}\right)$ d'inconnue X appartenant à $\mathcal{M}$
   d) Soit $C = A(-1)$. déterminer C^n pour tout entier naturel $n$que)

4. Etudier la fonction

$$f : x \to \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^4 + t^2 + 1}} dt$$

   Ensemble de définition, continuité, dérivée, graphe.

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose :

$$I_n = \int_0^1 \frac{1}{(1+x)\left(1+\frac{x}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{x}{n}\right)} dx$$

Etudier la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, montrer que

$$I_n \leq \int_0^1 \frac{dx}{1+x\ln(n)}dx$$

et déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$

6. Soit a un réel strictement positif. On se propose de déterminer les fonctions f trois fois dérivables sur un intervalle $[0,2a]$ à valeurs réelles et telles que

$$\forall x \in [0,2a]\,, \frac{f(x)}{2} = f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(a - \frac{x}{2}\right)$$

Montrer qu'il existe $c \in [0,a]$ tel que $f''(c) = \max_{t\in[0,2a]}(f''(t))$ et prouver que $f''(c) = f''\left(\frac{c}{2}\right)$ Déterminer alors les solutions f.

7. On se donne n variables aléatoires mutuellement indépendantes $(U_i)_{1\leq i\leq n}$ de même loi de Bernouilli de paramètre $p \in]0,1.[$

   a) déterminer l'espérance et la variance de la variable aléatoire $Y = \sum_{i=1}^n U_i$.
   b) On suppose que $n \geq 4$. calculer , pour chaque entier $k \in \mathbb{N}$ la probabilité de l'événement $[Y = k]$ conditionné par l'événement $[U_2 = 0] \cap [U_4 = 1]$
   c) calculer , pour chaque entier $k \in \mathbb{N}$, la probabilité de l'événement $[Y = k]$ conditionné à l'événement $[Y > 0]$

8. Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilité (Ω, A, P) et à valeurs dans $\mathbb{N}$. Pour tout ω de Ω, on pose $Y(\omega) = \frac{X(\omega)}{2}$ si $X(\omega)$ est pair et $Y(\omega) = \frac{1-X(\omega)}{2}$ sinon.

   a) Déterminer $[Y = 0]$ et, pour chaque $k \in \mathbb{Z}$, $[Y = k]$.
   b) Soit $p \in]0,1[$. On suppose que la loi de X est donnée par :

   $$\forall k \in \mathbb{N},\ \mathrm{P}(X = k) = p(1-p)^k$$

   Déterminer alors la loi de Y ainsi que son espérance mathématique.

9. **Dénombrement.**

   Une urne contient des boules numérotées de 1 à n. On effectue des tirages avec remise tant que les numéros obtenus forment une suite strictement décroissante.

   a) Déterminer la loi de la variable aléatoire X représentant le nombre de tirages effectués.
   b) Déterminer son espérance mathématique et la limite de cette espérance quand $n \to +\infty$.
   On pourra utiliser sans démonstration la formule suivante :
   si X admet une espérance alors $E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{P}(X > k)$.

Question sans préparation

1. Extrema de
$$f(x,y) = x^2 + y^2 - (x-y)^2$$

2. Montrer que la famille $(p_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{Z}^2}$ définie par
$$\begin{aligned} p_{1,1} &= p_{-1,1} = \frac{1}{32} \\ p_{-1,-1} &= p_{1,-1} = p_{1,0} = p_{0,1} = \frac{3}{32} \\ p_{-1,0} &= p_{0,-1} = \frac{5}{32} \\ p_{0,0} &= \frac{8}{32} \end{aligned}$$
   et $p_{i,j} = 0$ sinon, peut être considérée comme la loi d'un couple (X,Y).

   étudier l'indépendance de X et de Y; de X^2 et de Y^2. $= \ldots$

3. On considère la fonction définie par
$$f(x) = (x-1)^{1/(x-2)}$$
   Quel est l'ensemble de définition de f? Quelle valeur attribuer à $f(2)$ pour prolonger f en une fonction continue en $x=2$? Tracer l'allure du graphe de f au voisinage de $x=2$.

4. On considère trois variables aléatoires mutuellement indépendantes U, V, et W suivant des lois de Poisson de paramètre respectifs α, β et γ.

   On pose $X = U + V$ et $Y = V + W$. Calculer $\text{cov}(X,Y)$.

5. Soit X une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[0,1]$.
   Déterminer les fonctions de répartitions et les espérances mathématiques des variables aléatoires
$$Y = \inf(X, 1-X), \quad Z = \sup(X, 1-X) \text{ et } R = \frac{Y}{Z}$$

6. Une matrice $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite nilpotente s'il existe ne puissance $p \in \mathbb{N}^*$ telle que $N^p = 0$.

   A quelle condition une matrice nilpotente est-elle diagonalisable ?

   Si elle est diagonalisable alors $N = PDP^{-1}$ avec $N^p = PD^pP^{-1} = 0$ pour un p précédent.

   Alors $D^n = 0$ et D étant diagonale, tous ses termes diagonaux sont nuls.

   Donc $N = 0$