Collection Les Mémentos de l'INSEEC

Cahiers méthodologiques pour les classes préparatoires aux Grandes Écoles de Commerce

BUSINESS SCHOOL
INSEEC
PARIS • BORDEAUX

Formulaire de Maths

par Xavier Chauvet

MÉMENTO N° 10

préparat
méthode
réussite
concours

Les Mémentos de l'INSEEC

Depuis désormais plus de dix ans, l'INSEEC propose aux élèves des classes préparatoires des conférences à travers la France sur les sujets d'Histoire et de Culture Générale qu'appellent les programmes des concours d'entrée aux Ecoles de Commerce. Confortés par les nombreux témoignages enthousiastes que ces manifestations ont suscités chaque année, nous avons pris la décision d'aller plus loin dans cette aide offerte aux étudiants pour compléter leur préparation.

Nous avons donc confié à Éric Cobast le soin d'animer une collection de petits ouvrages méthodologiques destinés aux étudiants de première et de seconde année.

Les « Mémentos de l'INSEEC » ont été conçus et rédigés par des professeurs des classes préparatoires particulièrement sensibilisés aux difficultés que rencontrent régulièrement leurs étudiants. C'est au service de tous qu'ils apportent à présent leur expérience. L'ambition des « Mémentos » n'est évidemment pas de se substituer d'une manière ou d'une autre aux cours annuels, mais de proposer des outils, principalement sur le plan de la méthode et du lexique, susceptibles d'accompagner la préparation des concours.

Le souci a été d'efficacité et d'utilité quant au choix du format. Il nous a été dicté par l'intention de publier des textes maniables, d'un accès aisé et vers lesquels il est commode de revenir souvent.

Nous avions choisi, l'an passé, de débuter par une méthodologie de la dissertation d'Histoire, de la dissertation de philosophie, de l'épreuve écrite d'anglais et enfin de l'épreuve de contraction. A ces quatre premiers titres, il fallait ajouter une présentation détaillée des entretiens qui suivent l'admissibilité et un lexique propre au thème retenu pour la C.S.H.

Cette année, le dispositif est complété par deux mémentos de mathématiques (un formulaire et un recueil « d'astuces »), un mémento d'espagnol, un mémento d'économie et enfin le lexique du thème de C.S.H. de l'année, l'Action.

En vous souhaitant bonne réception et bon usage de ces mémentos, et avec l'assurance que cette année d'efforts trouvera sa juste récompense…

Catherine Lespine

Directrice Générale du Groupe INSEEC

Les Mémentos
INSEEC

Formulaire de Maths

Xavier Chauvet
Ancien élève de l'Ecole Normale Supérieure - ENS Ulm
Professeur agrégé de Mathématiques en classes préparatoires au Lycée Lakanal à Sceaux

Sommaire

1. Algèbre **4**

2. Analyse **14**

3. Probabilités **24**

Ce formulaire ne remplace en aucun cas un cours.

Il peut seulement servir à combler rapidement une lacune portant sur une formule rencontrée au détour d'un exercice.

Il ne faut pas croire que l'on a appris son cours lorsque l'on connaît les formules qu'il contient. Pour vérifier que l'on connaît son cours, il faut d'une part voir si à partir du seul plan du cours on est capable de le réécrire intégralement, puis vérifier que l'on sait faire les exercices d'applications directes contenus dans les feuilles de TD ou dans les livres, sans oublier que le but est de résoudre des problèmes de maths de 4 heures.

Apprendre une formule par coeur ne remplace jamais le fait de l'avoir comprise.

Une formule apprise par coeur et non comprise sera impossible à retrouver le jour du concours. Il faut essayer d'une part de se convaincre que l'on a bien compris cette formule en se souvenant des remarques du professeur, de l'endroit du cours où elle se situe, en essayant d'associer une image ou un dessin à cette formule, mais il faut également pouvoir associer à cette formule quelques exercices dans lesquels on l'a retrouvée afin de mieux percevoir son utilité.

Rappelons au passage quelques liens de maths utiles en ECS :

Annales des écrits de la CCIP :
http://abdellah.bechata.free.fr/phec/scientifique.php

Annales des oraux d'ESCP :
http://www.escp.fr/fr/programmes/master/annales.html

Programme officiel :
http://www.prepa-hec.org/prepa/programmes/mathematiques.php

1 Algèbre

1.1 Algèbre générale

1.1.1 Utilisation de $\sum$, $\bigcup$, $\bigcap$ et $\binom{n}{k}$

Produit de sommes

Si $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n \in \mathbb{R}$ alors

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i\Big) * \Big(\sum_{i=1}^{n} b_i\Big) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i\, b_j = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i + \sum_{\substack{i,\, j \,\in\, [\![1,\, n]\!] \\ i \neq j}} a_i b_j$$

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i\Big)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} a_i a_j = \sum_{i,j \in [\![1,n]\!]} a_i a_j$$

Sommes classiques

Si $a, b \in \mathbb{Z}$ avec $a \leqslant b$, $x, y, q \in \mathbb{R}$, et $n \in \mathbb{N}^*$,

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

- $\displaystyle\sum_{k=a}^{b} k = \frac{a+b}{2}(b-a+1)$ ="(moyenne des extrêmes)*(nombre de termes)"

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ct • $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \Big(\sum_{k=1}^{n} k\Big)^2 = \Big(\frac{n(n+1)}{2}\Big)^2$

- $\displaystyle\sum_{k=a}^{b} q^k = \begin{cases} q^a \dfrac{1-q^{b-a+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \\ b-a+1 & \text{si } q = 1 \end{cases}$ soit • $\displaystyle\sum_{k=a}^{b} q^k = \begin{cases} q^{\text{1er indice}} \dfrac{1-q^{\text{Nb de termes}}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \\ \text{Nb de termes} & \text{si } q = 1 \end{cases}$

- $\displaystyle x^n - y^n = (x-y)\sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-k-1}$

Formule du binôme de Newton

- $\displaystyle\forall x, y \in \mathbb{C},\ (x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$

Lien coefficients/racines d'un polynôme

- $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(X-a_k) = X^n - \Big(\sum_{i=1}^{n} a_i\Big)X^{n-1} + \Big(\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} a_i a_j\Big)X^{n-2} + \ldots + (-1)^k \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n} a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_k} X^{n-k} +$

$\displaystyle\ldots + (-1)^n \prod_{k=1}^{n} a_k$

Union, intersection, complémentaire

Si $n \in \mathbb{N}^*$ et $A, B, C, A_1, ..., A_n$ sont des parties d'un ensemble E, alors (en notant $\overline{A} = E \setminus A$)

- $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
- $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
- $\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \cap B = \bigcup_{k=1}^{n} (A_k \cap B)$
- $\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) \cup B = \bigcap_{k=1}^{n} (A_k \cup B)$
- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
- $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
- $\overline{\bigcup_{k=1}^{n} A_k} = \bigcap_{k=1}^{n} \overline{A_k}$
- $\overline{\bigcap_{k=1}^{n} A_k} = \bigcup_{k=1}^{n} \overline{A_k}$

Formules avec $\binom{n}{k}$

- $\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in [\![0, n]\!], \binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!} = \dfrac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!}$
- $\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \geqslant n+1, \binom{n}{k} = 0$
- $\forall n, k \in \mathbb{N}, \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$
- $\forall k, n \in \mathbb{N}^*, \dfrac{n}{k}\binom{n-1}{k-1} = \binom{n}{k}$
- $\forall n, p, k \in \mathbb{N}, \sum_{i=0}^{p} \binom{n+i}{k} = \binom{n+p+1}{k+1}$
- $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$
- $\forall m, n, p \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k}\binom{m}{p-k} = \binom{n+m}{p}$
- $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$

1.1.2 Trigonométrie

Formules au programme

$\mathbf{x}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(\mathbf{x})$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(\mathbf{x})$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan(\mathbf{x})$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	indéfini

$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$
$\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)$
$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$
$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$

$\sin(-x) = -\sin(x)$	$\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos(x)$	$\sin(\frac{\pi}{2} + x) = \cos(x)$	$\sin(\pi - x) = \sin(x)$	$\sin(\pi + x) = -\sin(x)$
$\cos(-x) = \cos(x)$	$\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin(x)$	$\cos(\frac{\pi}{2} + x) = -\sin(x)$	$\cos(\pi - x) = -\cos(x)$	$\cos(\pi + x) = -\cos(x)$
$\tan(-x) = -\tan(x)$	$\tan(\frac{\pi}{2} - x) = \frac{1}{\tan(x)}$	$\tan(\frac{\pi}{2} + x) = -\frac{1}{\tan(x)}$	$\tan(\pi - x) = -\tan(x)$	$\tan(\pi + x) = \tan(x)$

$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$	$1 + \tan^2(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$	$\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$ $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x)$

Formules hors programme :

$\tan(a+b) = \dfrac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$	$\tan(a-b) = \dfrac{\tan(a)-\tan(b)}{1+\tan(a)\tan(b)}$	$\tan(2a) = \dfrac{2\tan(a)}{1+\tan^2(a)}$

$\sin(p)+\sin(q) = 2\sin\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\cos\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$	$\cos(p)+\cos(q) = 2\cos\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\cos\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$
$\sin(p)-\sin(q) = 2\cos\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\sin\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$	$\cos(p)-\cos(q) = -2\sin\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\sin\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$

$\sin(x) = \dfrac{2t}{1+t^2}$	$\cos(x) = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$	$\tan(x) = \dfrac{2t}{1-t^2}$

$\left(\text{ avec } t = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)\right)$

1.1.3 Complexes

Formules d'Euler :

$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\,\sin(\theta)$	$\cos(\theta) = \dfrac{e^{i\theta}+e^{i\theta}}{2}$	$\sin(\theta) = \dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2\,i}$

Racines n^{èmes} :

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $z = \rho\, e^{i\theta} \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, les racines n^{emes} de z sont $\{\sqrt[n]{\rho}\, e^{\frac{i\theta}{n}+\frac{2ik\pi}{n}} \;/\; k \in [\![0, n-1]\!]\}$

- $\omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$
- $\omega_k^n = 1$
- $\overline{\omega_k} = \omega_{-k} = \dfrac{1}{\omega_k}$
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k = 0$ (si $n \geqslant 2$)
- $\omega_k\omega_{k'} = \omega_{k+k'}$
- $j = e^{\frac{2i\pi}{3}} = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$
- $j^3 = 1$
- $\bar{j} = j^2 = \dfrac{1}{j}$
- $1+j+j^2 = 0$

Trinôme du second degré :

- Pour $a \in \mathbb{C}^*$, $b, c \in \mathbb{C}$, $\left(az^2+bz+c=0\right) \Longleftrightarrow \left(z = \dfrac{-b\pm\delta}{2a}\right)$ où $\delta \in \mathbb{C}$ vérifie $\delta^2 = b^2-4ac$
- La forme canonique de az^2+bz+c est $a\left[\left(z+\dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$
- $\left(\left\{\begin{array}{c} z_1+z_2 = S \\ z_1\,z_2 = P \end{array}\right.\right) \Longleftrightarrow \left(z_1 \text{ et } z_2 \text{ sont racines de } X^2 - S\,X + P\right)$

1.1.4 Polynômes

Produit de polynômes

$$\left(\sum_{k=0}^{n} a_k X^k\right) * \left(\sum_{k=0}^{p} b_k X^k\right) = \sum_{k=0}^{n+p} c_k X^k \text{ où } c_k = \sum_{\substack{i\,\in\,[\![0,n]\!],\ j\,\in\,[\![0,p]\!] \\ i+j=k}} a_i b_j$$

ou encore $c_k = \displaystyle\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} = \sum_{\substack{i,\,j\,\in\,[\![0..k]\!] \\ i+j=k}} a_i b_j$ en posant $a_i = 0$ et $b_j = 0$ pour $i > n$ et $j > p$

Degré et coefficient dominant

Si $a_0, ..., a_n, b_0, ..., b_p \in \mathbb{R}$ et si $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{p} b_k X^k$

$deg(P) = \max\{i \in [\![0, n]\!] \,/\, a_i \neq 0\}$ (si cela existe)
$deg(0) = -\infty$ (par convention)
$deg(P+Q) \leqslant \max\big(deg(P), deg(Q)\big)$
$deg(P+Q) = max\big(deg(P), deg(Q)\big)$ si $deg(P) \neq deg(Q)$
$deg(P\,Q) = deg(P) + deg(Q)$

$coefdom(P) = a_{deg(P)}$ (si cela existe)
$coefdom(0) = 0$
$coefdom(P\,Q) = coefdom(P) * coefdom(Q)$

Division euclidienne : $\forall A \in \mathbb{R}[X], \forall B \in \mathbb{R}[X]\backslash\{0\}, \exists!\, Q \in \mathbb{R}[X],\ \exists!\, R \in \mathbb{R}[X] \,/\, \begin{cases} A = B\,Q + R \\ deg(R) < deg(B) \end{cases}$

Formule de Taylor : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ \forall a \in \mathbb{R},\ P(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k$

Racine d'ordre k : Si $P \in \mathbb{R}[X]$ et $a \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$,

$$\Big(a \text{ est racine d'ordre } k \text{ de } P\Big) \iff \left(\begin{cases} (X-a)^k | P \\ (X-a)^{k+1} \nmid P \end{cases}\right) \iff \left(\exists Q \in \mathbb{R}[X] \,/\, \begin{cases} P(X) = (X-a)^k Q(X) \\ Q(a) \neq 0 \end{cases}\right)$$
$$\iff \Big(P(a) = P'(a) = ... = P^{(k-1)}(a) = 0 \text{ et } P^{(k)}(a) \neq 0\Big)$$
$$\iff \Big(P(a) = 0 \text{ et } (a \text{ est racine d'ordre } k-1 \text{ de } P)\Big)$$

$$\Big(a \text{ est racine d'ordre au moins } k \text{ de } P\Big) \iff \Big((X-a)^k | P\Big) \iff \Big(\exists Q \in \mathbb{R}[X] \,/\, P(X) = (X-a)^k Q(X)\Big)$$
$$\iff \Big(P(a) = P'(a) = ... = P^{(k-1)}(a) = 0\Big)$$
$$\iff \Big(P(a) = 0 \text{ et } (a \text{ est racine d'ordre au moins } k\text{–}1 \text{ de } P)\Big)$$

1.2 Algèbre linéaire

($\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)

1.2.1 Espaces vectoriels et applications linéaires

Espaces vectoriels

$$\left(\begin{array}{l} F \text{ est un sous-espace vectoriel} \\ \text{du } \mathbb{K}\text{-espace vectoriel E} \end{array}\right) \iff \left(\begin{cases} \bullet\ F \subset E \\ \bullet\ 0 \in F \\ \bullet\ \forall u, v \in F, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda u + v \in F \end{cases}\right)$$

Union et intersection

Si F et G sont deux sous-espaces de E, alors $\begin{cases} F \cap G \text{ est un sous-espace de } E \\ F \cup G \text{ est un sous-espace de } E \iff F \subset G \text{ ou } G \subset F \\ F + G \text{ est un sous-espace vectoriel contenant } F \cup G \end{cases}$

Applications linéaires : Si E, F sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels,

$$\Big(f : E \longrightarrow F \text{ est une application linéaire}\Big) \iff \left(\begin{array}{l} \forall u, v \in E \\ \forall \lambda \in \mathbb{K} \end{array},\ f(\lambda u + v) = \lambda f(u) + f(v)\right)$$

$$\Big(f \text{ est un } \underline{\text{endomorphisme}}\Big) \iff \Big(f \text{ est une application linéaire d'un espace vectoriel dans lui-même}\Big)$$

$$\Big(f \text{ est un } \underline{\text{isomorphisme}}\Big) \iff \Big(f \text{ est une application linéaire bijective}\Big)$$

$\Big(f$ est un <u>automorphisme</u>$\Big) \Longleftrightarrow \Big(f$ est un endomorphisme bijectif$\Big)$

Si $f, g \in \mathcal{L}(E)$,
et si $f \circ g = g \circ f$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $(f+g)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^k g^{n-k}$, où $f^0 = Id$ et $f^{k+1} = f^k \circ f$

<u>Famille de vecteurs</u>

Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et si $u_1, ..., u_n \in E$, alors $Vect(u_1, ..., u_n) = \Big\{ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k / \lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{K} \Big\}$

$\Big((u_1, ...u_n)$ est libre$\Big) \Longleftrightarrow \Big(\forall \lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}$, si $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k = 0$ alors $\lambda_1 = ... = \lambda_n = 0\Big)$

$\Big((u_1, ...u_n)$ est génératrice$\Big) \Longleftrightarrow \Big(Vect(u_1, ..., u_n) = E\Big)$

$\Big((u_1, ...u_n)$ est une base de $E\Big) \Longleftrightarrow \Big((u_1, ...u_n)$ est libre et génératrice$\Big)$

$$\Longleftrightarrow \Big(\forall u \in E, \exists!\,(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{K}^n / u = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k\Big)$$

<u>Théorème du rang</u>

Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et si F est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et si $f \in \mathcal{L}(E, F)$,
$\dim(Im(f)) + \dim(Ker(f)) = \dim($l'espace de départ$)$

1.2.2 Supplémentaires et projecteurs

<u>Deux espaces supplémentaires</u>

$\Big(F \oplus G = E\Big) \Longleftrightarrow \Big(F$ et G sont deux sous-espaces supplémentaires de $E\Big)$

$\Longleftrightarrow \Big(F + G = E$ et $F \cap G = \{0\}\Big)$

$\Longleftrightarrow \Big(\forall u \in E, \exists!\,(f, g) \in F \times G \,/\, u = f + g\Big)$

Si E est de dimension finie, alors

$\Big(F \oplus G = E\Big) \Longleftrightarrow \Big(\exists \mathcal{B}$ une base de F, et $\exists \mathcal{B}'$ une base de G telles que $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ soit une base de $E\Big)$

$\Longleftrightarrow \Big(\forall \mathcal{B}$ base de F, et $\forall \mathcal{B}'$ base de G alors $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ est une base de $E\Big)$

$\Longleftrightarrow \Big(2$ (au choix) des 3 propositions sont vraies : $\begin{cases} \bullet\ \dim(F) + \dim(G) = \dim(E) \\ \bullet\ F \cap G = \{0\} \\ \bullet\ F + G = E \end{cases}\Big)$

<u>Plusieurs espaces supplémentaires</u>

$\Big(F_1 \oplus F_2 \oplus ... \oplus F_n\Big) \Longleftrightarrow \Big(F_1, .., F_n$ sont des sous-espaces vectoriels de E en somme directe$\Big)$

$\Longleftrightarrow \Big(\forall \mathcal{B}_1$ base de $F_1, ..., \forall \mathcal{B}_n$ base de F_n, alors $\mathcal{B}_1, ..., \mathcal{B}_n$ est libre$\Big)$

$\Longleftrightarrow \Big(\exists \mathcal{B}_1$ base de $F_1, ..., \exists \mathcal{B}_n$ base de F_n, telles que $\mathcal{B}_1, ..., \mathcal{B}_n$ soit libre$\Big)$

$\Big(F_1 \oplus F_2 \oplus ... \oplus F_n = E\Big) \Longleftrightarrow \Big(\forall \mathcal{B}_1$ base de $F_1, ..., \forall \mathcal{B}_n$ base de F_n, alors $\mathcal{B}_1, ..., \mathcal{B}_n$ est une base de $E\Big)$

$\Longleftrightarrow \Big(\exists \mathcal{B}_1$ base de $F_1, ..., \exists \mathcal{B}_n$ base de F_n / $\mathcal{B}_1, ..., \mathcal{B}_n$ est une base de $E\Big)$

$\Big(F_1 \oplus F_2 \oplus ... \oplus F_n\Big) \Longrightarrow \Big(\dim(F_1 + ... + F_n) = \dim(F_1) + ... + \dim(F_n)\Big)$

Projecteurs - définition

Si E est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel, avec $E = F \oplus G$ et si on note $x = f + g$ la décomposition de x,

$\Big(p \in \mathcal{L}(E)$ est le projecteur sur F dans la direction de $G\Big) \Longleftrightarrow \Big(p : \left\{ \begin{array}{ccc} E = F \oplus G & \longrightarrow & E \\ x = f + g & \longmapsto & f \end{array} \right.\Big)$

Projecteurs - propriétés

$\Big(p \in L(E)$ est un projecteur$\Big) \Longleftrightarrow \Big(p \circ p = p\Big)$

et alors on a :

$\Big(p$ est un projecteur sur $Im(p)$ dans la direction de $Ker(p)\Big)$, donc $\Big(Im(p) \oplus Ker(p) = E\Big)$

$\Big(p(x) = x\Big) \Longleftrightarrow \Big(x \in Im(p)\Big)$ et $Im(p) = \{x \in E / p(x) = x\}$

$\Big(x = p(x) + (x - p(x))$ est la décomposition de tout vecteur x selon $Im(p)$ et $Ker(p)\Big)$

1.2.3 Calcul matriciel

Définition

Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $\mathcal{B} = e_1, ..., e_p$ base de E et $\mathcal{B}' = f_1, ..., f_n$ base de F

et si $A = Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, alors $\forall j \in [\![1, p]\!]$, $f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} f_i$

$\begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix}$ sont donc les coordonnées de $f(e_j)$ dans la base $\mathcal{B}' = f_1, ..., f_n$

Image et noyau

Si $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, alors

- $Im(A) = Vect\,(\text{Colonnes de } A) = Vect(\begin{pmatrix} a_{1,1} \\ \vdots \\ a_{n,1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{1,2} \\ \vdots \\ a_{n,2} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{1,p} \\ \vdots \\ a_{n,p} \end{pmatrix}) \subset \mathbb{K}^n$
- $Ker(A) = \Big\{(x_1, ..., x_p) \in \mathbb{K}^p / \left\{ \begin{array}{c} a_{1,1}x_1 + ... + a_{1,p}x_p = 0 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + ... + a_{n,p}x_p = 0 \end{array} \right. \Big\} \subset \mathbb{K}^p$

Produit matriciel

Si $A = (A_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B = (B_{i,j}) \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, alors

- $C = (C_{i,j}) = AB \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ et • $C_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} A_{i,k} B_{k,j}$

Transposée

Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, ${}^tA \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ et $\forall i \in [\![1, p]\!]$, $\forall j \in [\![1, n]\!]$, $({}^tA)_{i,j} = A_{j,i}$

- $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$

Matrices symétriques et antisymétriques

- $\mathcal{S}_n(\mathbb{K}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \,/\, {}^tA = A\}$ et $\dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{K})) = \dfrac{n(n+1)}{2}$
- $\mathcal{A}_n(\mathbb{K}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \,/\, {}^tA = -A\}$ et $\dim(\mathcal{A}_n(\mathbb{K})) = \dfrac{n(n-1)}{2}$
- $\mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$
- $M = \left(\dfrac{M + {}^tM}{2} + \dfrac{M - {}^tM}{2}\right)$ est la décomposition de $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ selon $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$

Matrices triangulaires supérieures

- $\Big(A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est triangulaire supérieure$\Big) \Longleftrightarrow \Big(\forall i, j \in [\![1, n]\!]$ avec $i > j$, on a $a_{i,j} = 0\Big)$
- $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$, l'ensemble des matrices triangulaires supérieures, est stable par multiplications.
  (c'est-à-dire : $\forall T, T' \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K}),\ TT' \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$)
- $\dim(\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})) = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Matrices inversibles

$$\begin{aligned}
\Big(A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \text{ est inversible}\Big) &\Longleftrightarrow \Big(\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \,/\, AB = BA = I_n\Big) \\
&\Longleftrightarrow \Big(\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \,/\, AB = I_n\Big) \Longleftrightarrow \Big(\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \,/\, BA = I_n\Big) \\
&\Longleftrightarrow \left(a : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ X & \longmapsto & AX \end{array} \right. \text{ est bijective}\right) \\
&\Longleftrightarrow \Big(\text{les colonnes de } A \text{ sont libres}\Big) \\
&\Longleftrightarrow \Big(\text{les colonnes de } A \text{ forment une base de } \mathbb{K}^n\Big)
\end{aligned}$$

Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont inversibles, alors • $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$ et • $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Si $a, b, c, d \in \mathbb{K}$, alors $\left(\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \text{ est inversible}\right) \Longleftrightarrow \Big(ad - bc \neq 0\Big)$ et $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$

1.2.4 Réduction des endomorphismes et matrices carrées

Eléments propres d'un endomorphisme

Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et si $f \in \mathcal{L}(E)$, alors

$$\begin{aligned}
\Big(\lambda \in \mathbb{K} \text{ est valeur propre de } f\Big) &\Longleftrightarrow \Big(\exists\, u \in E \setminus \{0\} \,/\, f(u) = \lambda u\Big) \\
&\Longleftrightarrow \Big(f - \lambda Id_E \text{ est non injective}\Big) \\
&\Longleftrightarrow \Big(Ker(f - \lambda Id_E) \neq \{0\}\Big) \\
&\Longleftrightarrow \Big((A - \lambda I_n) \text{ est non inversible,} \\
&\qquad \text{où } A \text{ est la matrice de } f \text{ dans une base de } E\Big) \\
&\Longleftrightarrow \Big(rg(A - \lambda I_n) < dim(E)\Big)
\end{aligned}$$

$\Big(x \in E$ est un <u>vecteur propre</u> de $f\Big) \iff \Big(x \neq 0$ et $\exists\, \lambda \in \mathbb{K}/f(x) = \lambda x\Big)$
$\iff \Big(x \neq 0$ et $f(x) \in Vect(x)\Big)$
$\iff \Big(Vect(x)$ est une droite stable par $f\Big)$

- (0 est valeur propre de f) $\iff$ (f est non inversible)
- $Sp(f) = \{$valeurs propres de $f\}$
- Les valeurs propres de f sont à chercher parmi les racines d'un polynôme annulateur :

$\forall P \in \mathbb{K}[X], \forall \lambda \in Sp(f), \Big(P(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}\Big) \Longrightarrow \Big(P(\lambda) = 0\Big)$

Eléments propres d'une matrice

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors

$\Big(\lambda \in \mathbb{K}$ est <u>valeur propre</u> de $A\Big) \iff \Big(\lambda$ est une valeur propre de $a : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ X & \longmapsto & AX \end{array} \right)$
$\iff \Big($l'équation $AX = \lambda X$ admet une solution $X \in \mathbb{K}^n$ non nulle$\Big)$

$\Big(X \in \mathbb{K}^n$ est <u>vecteur propre</u> de $A\Big) \iff \Big(X$ est vecteur propre de $a : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ X & \longmapsto & AX \end{array} \right)$

Critères de diagonalisabilité pour les endomorphismes

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ où E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.
On note $\forall \lambda \in \mathbb{K}, E_\lambda = Ker(f - \lambda\, Id)$

$\Big(f$ diagonalisable$\Big) \iff \Big($il existe une base de E formée de vecteurs propres de $f\Big)$
$\iff \Big($il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est diagonale$\Big)$
$\iff \Big(E$ est somme (directe) des espaces propres de $f\Big)$
$\iff \Big(\displaystyle\sum_{\lambda \in Sp(f)} \dim(E_\lambda) = \dim(E) \Big)$

- Si $\Big(f$ a n valeurs propres distinctes où $n = \dim(E)\Big)$ alors $\Big(f$ diagonalisable$\Big)$
- Si f n'a qu'une valeur propre, alors $\Big(f$ diagonalisable $\Big) \iff \Big(f$ est une homothétie $\Big)$

Matrices de passage

Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases de E, et $\mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$, alors
$\mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ est la matrice des coordonnées des vecteurs de $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$:
$\mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = Mat_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = Mat_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(Id_E)$

Critères de diagonalisabilité pour les matrices

$\Big(A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonalisable$\Big) \iff \Big(\exists P \in GL_n(\mathbb{K})/P^{-1}AP$ soit diagonale$\Big)$
$\iff \Big(a : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ X & \longmapsto & AX \end{array} \right.$ est diagonalisable$\Big)$
$\iff \Big(\mathbb{K}^n$ est somme (directe) des espaces propres de $A\Big)$
$\iff \Big(\displaystyle\sum_{\lambda \in Sp(A)} \dim\big(Ker(A - \lambda I_n)\big) = n \Big)$

Si une matrice est triangulaire supérieure, alors <u>ses valeurs propres</u> sont <u>ses coefficients diagonaux</u>.

1.3 Algèbre bilinéaire

1.3.1 Produit scalaire

<u>Définition</u>

$\Big(\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ est un produit scalaire sur l'espace vectoriel réel $E\Big)$

$$\Longleftrightarrow \forall\, u, v, w \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \begin{cases} \bullet\ \varphi(u,v) = \varphi(v,u) & \text{symétrique} \\ \bullet\ \varphi(u,\ v+\lambda w) = \varphi(u,v) + \lambda\, \varphi(u,w) & \text{linéaire à droite, donc bilinéaire} \\ \bullet\ \varphi(u,u) \geqslant 0 & \text{positive} \\ \bullet\ \big(\varphi(u,u) = 0\big) \Longrightarrow \big(u = 0\big) & \text{définie} \end{cases}$$

<u>Orthogonalisation de Schmidt</u>

Si $e_1, ..., e_n$ est une famille libre, alors

- $f_1 = \dfrac{1}{||e_1||}\, e_1$
- $\tilde{f}_{i+1} = e_{i+1} - \displaystyle\sum_{k=1}^{i} < e_{i+1}, f_k > f_k$
- $f_{i+1} = \dfrac{1}{||\tilde{f}_{i+1}||}\, \tilde{f}_{i+1}$

définit $f_1, ..., f_n$ comme une base orthonormée de $Vect(e_1, ..., e_n)$

<u>Inégalité de Cauchy-Schwarz</u>

- Si $< \, , \, >$ est un produit scalaire et $||\,.\,||$ la norme associée, alors $| < u, v > | \leqslant ||u||\ ||v||$
- $\Big(\ | < u, v > | = ||u||\ ||v|| \ \Big) \Longleftrightarrow \Big(u$ et v sont liés $\Big)$

<u>Formules avec < , ></u>

- $< \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i,\ \sum_{j=1}^{p} \mu_j v_j > \ = \ \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_i \mu_j < u_i, v_j >$
- Si $e_1, ..., e_n$ est base orthonormée, alors $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} < x, e_i > e_i$ et $||x||^2 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} < x, e_i >^2$
- $||u+v||^2 = ||u||^2 + ||v||^2 + 2 < u, v >$
- $< u, v > = \dfrac{1}{2}\Big(||u+v||^2 - ||u||^2 - ||v||^2 \Big)$

<u>Projecteur orthogonal</u>

- Si p_F est le projecteur orthogonal sur F et si $f_1, ..., f_p$ est une base orthonormée de F, alors

$\forall x \in E, \quad p_F(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} < x, f_i > f_i$

- $\Big(v = p_F(x)\Big) \Longleftrightarrow \Big(\begin{cases} \bullet\ v \in F \\ \bullet\ ||x - v|| = \min\limits_{u \in F} ||x - u|| \end{cases} \Big)$

<u>Méthode des moindres carrés</u>

Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ avec $n \geqslant p$ est une <u>matrice de rang p</u> et $B \in \mathbb{R}^n$

$\Big(\ ||AX - B||^2$ est minimum quand X parcourt $\mathbb{R}^p \Big) \Longleftrightarrow \Big(X = \big({}^tAA\big)^{-1}\, {}^tA\, B \Big)$

Droite de régression linéaire

Si $(x_i, y_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est un nuage de points de $\mathbb{R}^2$, on pose :

- $\overline{X} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i$
- $\overline{Y} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i$
- $V(X) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \overline{X}^2$
- $V(Y) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \overline{Y}^2$
- $cov(X,Y) = \sigma_{XY} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \overline{X}\,\overline{Y}$
- $\rho_{XY} = \dfrac{\sigma_{XY}}{\sqrt{V(X)\,V(Y)}}$

Si les $(x_i)_{\in[\![1,n]\!]}$ ne sont pas tous égaux, alors

- les réels a et b minimisant $S(a,b) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}(y_i - ax_i - b)^2$ sont $\mathbf{a = \dfrac{cov(X,Y)}{V(X)}}$ et $\mathbf{b = \overline{Y} - a\overline{X}}$
- $\Big(\rho_{XY} = 1\Big) \Longleftrightarrow \Big($les points sont alignés$\Big)$

1.3.2 Endomorphismes symétriques

Théorème spectral

$\Big(A$ est une matrice symétrique réelle$\Big) \Longleftrightarrow \Big(\exists P$ matrice orthogonale, $\exists D$ diagonale $/\ D = {}^tPAP\Big)$

Décomposition en somme de projecteurs orthogonaux

- Si $X \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur de norme 1,

alors ${}^tXX$ est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ de la projection orthogonale sur $Vect(X)$

- $\Big(A$ symétrique réelle$\Big) \Longrightarrow \Big(\exists X_1, ..., X_n$ b.o.n. de $\mathbb{R}^n, \exists \lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}\ /\ A = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, {}^tX_iX_i\Big)$

et les $(X_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ forment une base orthonormée de vecteurs propres de A

Endomorphisme symétrique

- Si φ est un endomorphisme d'un espace euclidien E, alors

$\Big(\varphi$ est un endomorphisme symétrique$\Big) \Longleftrightarrow \Big(\forall\, u, v \in E,\ <\varphi(u), v> = <u, \varphi(v)>\Big)$
$\Longleftrightarrow \Big($la matrice de φ dans une b.o.n. est symétrique$\Big)$

Forme quadratique

- Si φ est un endomorphisme symétrique, et si $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ q(x) = <\varphi(x), x>$,

alors q est une forme quadratique, $\begin{cases} \text{partout } \geqslant 0 \text{ si } \varphi \text{ a toutes ses valeurs propres } \geqslant 0 \\ \text{partout } \leqslant 0 \text{ si } \varphi \text{ a toutes ses valeurs propres } \leqslant 0 \end{cases}$

- Si A est une matrice symétrique réelle, et si $\forall X \in \mathbb{R}^n,\ q(X) = {}^tXAX$,

alors q est une forme quadratique, $\begin{cases} \text{partout } \geqslant 0 \text{ si } A \text{ a toutes ses valeurs propres } \geqslant 0 \\ \text{partout } \leqslant 0 \text{ si } A \text{ a toutes ses valeurs propres } \leqslant 0 \end{cases}$

2 Analyse

2.1 Suites réelles

Suites arithmético-géométriques

Si $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 1$, si $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = a\,u_n + b$, alors $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = a^n\Big(u_0 - \dfrac{b}{1-a}\Big) + \dfrac{b}{1-a}$

Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle et $a, b \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = a\,u_{n+1} + b\,u_n$,
  Si $X^2 - a\,X - b$ ...
  ... admet 2 racines $q_1, q_2 \in \mathbb{R}$ distinctes, alors $\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} / \forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \lambda\,q_1^n + \mu\,q_2^n$
  ... admet une racine double $q \in \mathbb{R}$, alors $\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} / \forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = (\lambda + \mu\,n)\,q^n$
  ... admet 2 racines $\rho e^{i\theta}, \rho e^{-i\theta} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, alors $\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} / \forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \rho^n\big(\lambda\cos(n\theta) + \mu\sin(n\theta)\big)$

- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite complexe et $a, b \in \mathbb{C}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = a\,u_{n+1} + b\,u_n$,
  Si $X^2 - a\,X - b$ ...
  ... admet 2 racines $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ distinctes, alors $\exists \lambda, \mu \in \mathbb{C} / \forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \lambda\,z_1^n + \mu\,z_2^n$
  ... admet une racine double $z \in \mathbb{R}$, alors $\exists \lambda, \mu \in \mathbb{C} / \forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = (\lambda + \mu\,n)\,z^n$

Négligeabilité, domination, équivalence de suites

- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites réelles quelconques,

$$\Big(u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n)\Big) \Longleftrightarrow \Big(\exists (\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ une suite qui tend vers } 0, \exists\, N \in \mathbb{N} \,/\, \forall n \geqslant N, u_n = \epsilon_n\, v_n\Big)$$

$$\Big(u_n = \underset{n\to+\infty}{O}(v_n)\Big) \Longleftrightarrow \Big(\exists (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ une suite bornée}, \exists\, N \in \mathbb{N} \,/\, \forall n \geqslant N, u_n = b_n\, v_n\Big)$$

$$\Big(u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n\Big) \Longleftrightarrow \Big(\exists (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ une suite qui tend vers } 1, \exists\, N \in \mathbb{N} \,/\, \forall n \geqslant N, u_n = \lambda_n\, v_n\Big)$$

- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites réelles telles que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n \neq 0$,

$$\Big(u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n)\Big) \Longleftrightarrow \Big(\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0\Big)$$

$$\Big(u_n = \underset{n\to+\infty}{O}(v_n)\Big) \Longleftrightarrow \Big(\Big(\frac{u_n}{v_n}\Big)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\Big)$$

$$\Big(u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n\Big) \Longleftrightarrow \Big(\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1\Big)$$

2.2 Séries numériques

Définition

Une série $\left(\sum_{n\geqslant 0} u_n \text{ converge}\right) \Longleftrightarrow \left(\text{la suite } \left(\sum_{n=0}^{N} u_n\right)_{N\in\mathbb{N}} \text{ converge}\right)$

Transformations utiles

- $\left(\sum_{n\geqslant 0} (u_{n+1} - u_n) \text{ converge}\right) \Longleftrightarrow \left(\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge}\right)$
- Toute série numérique est la différence de 2 séries à termes positifs :

$\forall x \in \mathbb{R}, x = (x + |x|) - |x| = \max(x, 0) - \max(-x, 0)$

$$\sum_{n=0}^{N} u_n = \sum_{n=0}^{N} (u_n + |u_n|) - \sum_{n=0}^{N} |u_n| = \sum_{n=0}^{N} \max(u_n, 0) - \sum_{n=0}^{N} \max(-u_n, 0)$$

Critère de comparaison des séries à termes positifs

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \exists N > 0 \,/\, \forall n \geqslant N,\ 0 \leqslant u_n \leqslant v_n \\ \bullet\ \sum_{n\geqslant 0} v_n \text{ converge} \end{array}\right\} \Longrightarrow \sum_{n\geqslant 0} u_n \text{ converge}$$

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \exists N > 0 \,/\, \forall n \geqslant N,\ 0 \leqslant u_n \leqslant v_n \\ \bullet\ \sum_{n\geqslant 0} u_n \text{ diverge} \end{array}\right\} \Longrightarrow \sum_{n\geqslant 0} v_n \text{ diverge}$$

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n) \\ \bullet\ \sum_{n\geqslant 0} v_n \text{ converge absolument} \end{array}\right\} \Longrightarrow \sum_{n\geqslant 0} u_n \text{ converge absolument}$$

Critère de comparaison des séries à termes positifs équivalents

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \exists N > 0 \,/\, \forall n \geqslant N,\ u_n \geqslant 0 \\ \bullet\ u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \end{array}\right\} \Longrightarrow \left(\sum_{n\geqslant 0} u_n \text{ et } \sum_{n\geqslant 0} v_n \text{ ont même nature}\right)$$

Séries Riemann

- $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \left(\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge}\right) \Longleftrightarrow \left(\alpha > 1\right)$

Séries géométriques

- $\forall q \in \mathbb{R}$, $\Big(\sum_{n\geqslant 0} q^n$ converge$\Big) \iff \Big(|q|<1\Big)$ et alors $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$
- $\forall q \in \mathbb{R}$, $\Big(\sum_{n\geqslant 1} nq^{n-1}$ converge$\Big) \iff \Big(|q|<1\Big)$ et alors $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$
- $\forall q \in \mathbb{R}$, $\Big(\sum_{n\geqslant 2} n(n-1)q^{n-2}$ converge$\Big) \iff \Big(|q|<1\Big)$ et alors $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)q^{n-2} = \frac{2}{(1-q)^3}$

Séries exponentielles

- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = \exp(x)$

Formule du binôme négatif

- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall r \in \mathbb{N}$, $\Big(\sum_{n\geqslant r} \binom{n}{r} x^{n-r}$ converge$\Big) \iff \Big(|x|<1\Big)$ et alors $\displaystyle\sum_{n=r}^{+\infty} \binom{n}{r} x^{n-r} = \frac{1}{(1-x)^{r+1}}$

2.3 Etude globale d'une fonction

Symétries d'une fonction

Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, alors

- $\big(f$ est paire$\big) \iff \big(\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(-x)\big)$
- $\big(f$ est impaire$\big) \iff \big(\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = -f(x)\big)$
- $\Big(\mathcal{C}_f$ admet l'axe $\Delta : x = a$ comme axe de symétrie$\Big) \iff \Big(\forall x \in \mathbb{R},\ f(a+x) = f(a-x)\Big)$
- $\Big(\mathcal{C}_f$ admet (a,b) comme centre de symétrie$\Big) \iff \Big(\forall x \in \mathbb{R},\ \dfrac{f(a+x)+f(a-x)}{2} = b\Big)$

Branches infinies

- Si $\lim\limits_{x\to b} f(x) = \pm\infty$, alors $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote verticale d'équation $x = b$.
- Si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = b$, alors $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = b$.
- Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$
  - Si $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \pm\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \pm\infty$, $\mathcal{C}_f$ admet une branche parabolique verticale.
  - Si $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \pm\infty$, $\mathcal{C}_f$ admet une branche parabolique horizontale.
  - Si $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R}$
    - Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - ax = \pm\infty$, $\mathcal{C}_f$ admet une branche parabolique de direction $\mathcal{D} : y = ax$
    - Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - ax = b$, $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote d'équation $\mathcal{D} : y = ax + b$

2.4 Fonctions numériques réelles : calcul différentiel

Dérivées classiques

• $\alpha \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$

$\mathbf{f(x)}$	x^α	$\frac{1}{x}$	$\sqrt{x}$	e^x	$\ln\lvert x\rvert$	a^x
$\mathbf{f'(x)}$	$\alpha\, x^{\alpha-1}$	$\frac{-1}{x^2}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	e^x	$\frac{1}{x}$	$\ln(a)\, a^x$
$\mathbf{f^{(n)}(x)}$	$\alpha(\alpha-1)..(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$	$\frac{(-1)^n\, n!}{x^{n+1}}$	cf x^α	e^x	$\frac{(-1)^{n-1}\,(n-1)!}{x^n}$	$\big(\ln(a)\big)^n\, a^x$
Validité	$\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}^*$ ou $\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}_+^*$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}$

$\mathbf{f(x)}$	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\tan(x)$	$\arctan(x)$
$\mathbf{f'(x)}$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)} = 1+\tan^2(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\mathbf{f^{(n)}(x)}$	$\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$	$\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$	compliqué...	compliqué...
Validité	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\ +\pi\mathbb{Z}$	$\mathbb{R}$

• Si $u, v, u_1, ..., u_n$ représentent des fonctions, alors sous réserve d'existence,

• $(uv)' = u'v + uv'$ • $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ • $(u \circ v)' = v' \times (u' \circ v)$

• $\big(\ln|u|\big)' = \frac{u'}{u}$ • $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ • $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$

• $(u^\alpha)' = \alpha\, u'\, u^{\alpha-1}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ • $\big(\exp(u)\big)' = u'\, \exp(u)$ • $\left(\prod_{i=1}^{n} u_i\right)' = \sum_{i=1}^{n}\left(u_i' \prod_{\substack{j \in [\![1,n]\!] \\ j \neq i}} u_j\right)$

Dérivée d'une bijection réciproque

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ f \text{ est bijective de l'intervalle } I \text{ sur l'intervalle } J \\ \bullet\ f \text{ est dérivable sur } I \\ \bullet\ \forall x \in I,\ f'(x) \neq 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \bullet\ f^{-1} \text{ est dérivable sur } J \\ \bullet\ \forall y \in J,\ (f^{-1})'(y) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y))} \end{array}\right.$$

Formule de Leibniz

Si $n \in \mathbb{N}$ et si f, g sont de classe $\mathcal{C}^n$ sur un intervalle I, alors $f\,g$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et

$$(f\,g)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)$$

Théorème de Rolle

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ f \text{ continue sur } [a,b] \\ \bullet\ f \text{ dérivable sur }]a,b[\\ \bullet\ f(a) = f(b) \end{array}\right\} \Longrightarrow \Big(\exists\, c \in]a,b[\ /\ f'(c) = 0\Big)$$

Inégalité des accroissements finis

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ f \text{ continue sur } [a,b] \\ \bullet\ f \text{ dérivable sur }]a,b[\\ \bullet\ \exists M > 0\ /\ \forall u \in]a,b[,\ |f'(u)| \leqslant M \end{array}\right\} \Longrightarrow \Big(\,|\,f(b) - f(a)\,| \leqslant M|b-a|\Big)$$

Théorème de prolongement des fonctions de classe C¹

Version 1 :

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ f \text{ continue sur } [a,b] \\ \bullet\ f \text{ de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur}]a,b] \\ \bullet\ \lim\limits_{x \to a} f'(x) = \ell \end{array}\right\} \Longrightarrow \Big(\ f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } [a,b] \text{ et } f'(a) = \ell\ \Big)$$

Version 2 :

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ f \text{ de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur }]a,b] \\ \bullet\ \lim\limits_{x \to a} f'(x) = \ell \end{array}\right\} \Longrightarrow \left(\begin{array}{l} f \text{ se prolonge en une fonction de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } [a,b] \\ \text{et } f'(a) = \ell \end{array}\right)$$

Convexité

Si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$,

- $\Big(\ f \text{ convexe sur } I\ \Big) \Longleftrightarrow \Big(\forall x, y \in I, \forall t \in [0,1],\ f\big((1-t)x + ty\big) \leqslant (1-t)f(x) + t\,f(y)\Big)$

Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I,

- $\Big(\ f \text{ convexe sur } I\ \Big) \Longleftrightarrow \Big(\mathcal{C}_f \text{ est au-dessus de ses cordes}\Big)$
  $\Longleftrightarrow \Big(f' \text{ est croissante sur } I\Big)$

Si f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur I,

- $\Big(\forall x \in I,\ f''(x) \geqslant 0\Big) \Longrightarrow \Big(f \text{ est convexe}\Big)$

Inégalités classiques de convexité

Pour tout réel x où les expressions sont définies, on a :

- $|\sin(x)| \leqslant |x|$
- $\ln(1+x) \leqslant x$
- $e^x - 1 \geqslant x$

2.5 Fonctions numériques réelles : calcul intégral

Primitives usuelles

On note F une primitive de f.

$f(x)$	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\tan(x)$	$\dfrac{1}{x}$	x^α $(\alpha \neq -1)$	$\ln(x)$	e^x
$F(x)$	$-\cos(x)$	$\sin(x)$	$-\ln\Big(\lvert\cos(x)\rvert\Big)$ $(\star)$	$\ln\big(\lvert x\rvert\big)$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$x\ln(x)-x$	e^x

$f(x)$	$a^x \begin{pmatrix} a>0 \\ a\neq 1 \end{pmatrix}$	$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\dfrac{1}{\cos^2}$	$\dfrac{1}{\sin^2(x)}$
$F(x)$	$\dfrac{a^x}{\ln(a)}$	$Arctan(x)$	$Arcsin(x)$ $(\star)$	$Arccos(x)$ $(\star)$	$\tan(x)$	$-\dfrac{1}{\tan(x)}$ $(\star)$

Les primitives notées d'un $(\star)$ sont hors programme.

Intégration par parties

Si u, v sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[a,b]$, alors

$$\int_a^b u'(t)\,v(t)\,dt = \Big[u(t)\,v(t)\Big]_a^b - \int_a^b u(t)\,v'(t)\,dt$$

Changement de variable

• Si f est une fonction continue sur un segment $[a,b]$ et si φ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle $[\alpha,\beta]$ tel que $\varphi(\,[\alpha,\beta]\,) \subset [a,b]$, alors

$$\int_\alpha^\beta f\big(\varphi(t)\big)\,\varphi'(t)\,dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(u)\,du$$

• Si f est continue sur $]a,b[$ avec $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$ et si φ est une bijection de $]\alpha,\beta[$ sur $]a,b[$, croissante de classe $\mathcal{C}^1$, alors les intégrales $\displaystyle\int_a^b f(u)\,du$ et $\displaystyle\int_\alpha^\beta f\big(\varphi(t)\big)\,\varphi'(t)\,dt$ sont de même nature et en cas de convergence sont égales.

Méthode des rectangles, (ou sommes de Riemann)

• Si $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue, alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\Big(a+\frac{k(b-a)}{n}\Big) = \int_a^b f(t)\,dt$

• Si $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue, alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\Big(\frac{k}{n}\Big) = \int_0^1 f(t)\,dt$

Equation différentielle

Si g est continue sur un intervalle I, alors l'équation différentielle d'inconnue f :
$f'(x) = f(x)\,g(x)$ a pour solution les fonctions définies sur I par $x \longmapsto K\,exp\big(G(x)\big)$
où G est une primitive de g et $K \in \mathbb{R}$.

Formule de Taylor avec reste intégral

• Si $n \in \mathbb{N}$ et f est une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur un intervalle I, et si $a, x \in I$, alors

$$f(x) = f(a) + (x-a)\,f'(a) + (x-a)^2\,\frac{f''(a)}{2} + \ldots + (x-a)^n\,\frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!}\,f^{(n+1)}(t)\,dt$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} (x-a)^k\,\frac{f^{(k)}(a)}{k!} + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!}\,f^{(n+1)}(t)\,dt$$

• Si $a \in I$ et $h \in \mathbb{R}$ vérifient $a + h \in I$

$$f(a+h) = f(a) + h\,f'(a) + h^2\,\frac{f''(a)}{2} + \ldots + h^n\,\frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \int_a^{a+h} \frac{(a+h-t)^n}{n!}\,f^{(n+1)}(t)\,dt$$

Inégalité de Taylor-Lagrange

• Si $n \in \mathbb{N}$ et f est une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur un segment $[a, b]$,
si $\exists\, M > 0\,/\,\forall u \in [a, b],\ |f^{(n+1)}(u)| \leqslant M$, alors

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} (b-a)^k\,\frac{f^{(k)}(a)}{k!} \right| \leqslant M\,\frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Formule de Taylor-Young

• Si $n \in \mathbb{N}$ et f est une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et si $a \in I$, alors

$$f(x) = f(a) + (x-a)\,f'(a) + (x-a)^2\,\frac{f''(a)}{2} + \ldots + (x-a)^n\,\frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \underset{x \to a}{o}\big((x-a)^n\big)$$

Développements limités usuels

Au voisinage de 0, on a :

$(1+x)^\alpha$	$1 + \alpha\,x + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}\,x^2 + \ldots + \dfrac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}\,x^n + o(x^n)$
$\dfrac{1}{1+x}$	$1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n\,x^n + o(x^n)$
$\dfrac{1}{1-x}$	$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + o(x^n)$
$\ln(1+x)$	$x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n+1}\,\dfrac{x^n}{n} + o(x^n)$
$\ln(1-x)$	$-x - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{3} + \ldots - \dfrac{x^n}{n} + o(x^n)$

$\exp(x)$	$1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \ldots + \dfrac{x^n}{n!} + o(x^n)$
$\sin(x)$	$x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^p \dfrac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + o\big(x^{2p+2}\big)$
$\cos(x)$	$1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^p \dfrac{x^{2p}}{(2p)!} + o\big(x^{2p+1}\big)$

Intégrales sur un intervalle quelconque

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ f(t) \underset{t\to a}{\sim} g(t) \\ \bullet\ f(t) \geqslant 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \Big(\int_a^b f(t)\,dt \text{ et } \int_a^b g(t)\,dt \text{ ont même nature} \Big)$$

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ 0 \leqslant f(t) \leqslant g(t) \text{ (au voisinage de } a) \\ \bullet\ \displaystyle\int_a^b g(t)\,dt \text{ converge} \end{array}\right\} \Longrightarrow \Big(\int_a^b f(t)\,dt \text{ converge} \Big)$$

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ 0 \leqslant f(t) \leqslant g(t) \text{ (au voisinage de } a) \\ \bullet\ \displaystyle\int_a^b f(t)\,dt \text{ diverge} \end{array}\right\} \Longrightarrow \Big(\int_a^b g(t)\,dt \text{ diverge} \Big)$$

Intégrales classiques

- $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\,dt = -1$
- $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \Big(\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} \text{ converge} \Big) \Longleftrightarrow \big(\alpha > 1\big)$
- $\forall \lambda > 0,\ \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\,dt = \frac{1}{\lambda}$
- $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \Big(\displaystyle\int_a^b \frac{dt}{(t-a)^\alpha} \text{ converge} \Big) \Longleftrightarrow \big(\alpha < 1\big)$

Fonction Γ d'Euler

- $\forall x > 0,\ \Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\,dt$
- $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \Gamma(n+1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n\, e^{-t}\,dt = n!$
- $\forall x > 0, \Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$
- $\Gamma\Big(\dfrac{1}{2}\Big) = \sqrt{\pi}$

2.6 Fonctions numériques de plusieurs variables

Topologie

- On note pour $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $||x|| = \Big(\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i^2 \Big)^{\frac{1}{2}}$ la norme euclidienne d'un vecteur x.
- La boule ouverte de centre $a \in \mathbb{R}^n$ et de rayon $r > 0$ est $B(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^n \,/\, ||x-a|| < r\}$
- $\Big(\Omega \subset \mathbb{R}^n \text{ est un ouvert de } \mathbb{R}^n\Big) \Longleftrightarrow \Big(\forall x \in \Omega,\ \exists r > 0 \,/\, B(x,r) \subset \Omega\Big)$

- $\Big(F \subset \mathbb{R}^n$ est un fermé de $\mathbb{R}^n\Big) \Longleftrightarrow \Big(\mathbb{R}^n \setminus F$ est un ouvert de $\Omega\Big)$
- Si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est continue alors $\{x \in \Omega / \, f(x) > 0\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.
- Si F est un fermé de $\mathbb{R}^n$ et $f : F \to \mathbb{R}$ est continue alors $\{x \in F / \, f(x) \geqslant 0\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^n$.

Dérivées partielles et gradient

($f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction définie sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$)

- Si $A(a_1, .., a_n) \in \Omega$ et $i \in [\![1, n]\!]$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(A) = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(a_1, .., a_{i-1}, \, a_i + t \, , a_{i+1}, .., a_n)}{t}$
- $\nabla f(A) = \Big(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(A), \, \ldots \, , \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(A)\Big) \in \mathbb{R}^n$

Dérivées directionnelles

Si $A \in \Omega$, $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ et $g : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & f(A + t\,U) \end{array} \right.$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ où g est définie,

- $g'(t) = < \nabla f(A + t\,U) \, , \, U > = \displaystyle\sum_{i-1}^{n} u_i \, \frac{\partial f}{\partial x_i}(A + tU)$
- dérivée de f en A dans la direction U :

$$\frac{\partial f}{\partial U}(A) = \lim_{t \to 0} \frac{f(A + t\,U) - f(A)}{t} = < \nabla f(A) \, , \, U > = g'(0)$$

- dérivée seconde de f en A dans la direction U :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial U^2}(A) = q_A(U) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} u_i \, u_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(A) = g''(0)$$

Développements limités

- Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω, et si $A \in \Omega$, alors $\exists \, \epsilon : \Omega \to \mathbb{R}$ continue en 0 telle que $\epsilon(0) = 0$ et $f(A + H) = f(A) + < \nabla f(A), H > + ||H|| \, \epsilon(H)$

$$f(A + H) = f(A) + \sum_{i-1}^{n} h_i \, \frac{\partial f}{\partial x_i}(A) + ||H|| \epsilon(H), \text{ où } H = (h_1, ..., h_n)$$

- Si f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur Ω, et si $A \in \Omega$, alors $\exists \, \epsilon : \Omega \to \mathbb{R}$ continue en 0 telle que $\epsilon(0) = 0$ et $f(A + H) = f(A) + < \nabla f(A), H > + \dfrac{1}{2} \, q_A(H) + ||H||^2 \, \epsilon(H)$

$$f(A+H) = f(A) + \sum_{i=1}^{n} h_i \, \frac{\partial f}{\partial x_i}(A) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} h_i \, h_j \, \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(A) + ||H||^2 \, \epsilon(H), \text{ où } H = (h_1, ..., h_n)$$

Hessienne et forme quadratique associée

Si f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur Ω, et si $A \in \Omega$, alors

- $\nabla^2 f(A) = \Big(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(A)\Big)_{i,j \in [\![1,n]\!]} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$
- $q_A : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ H & \longmapsto & {}^t H \, \big(\nabla^2 f(A)\big) H \end{array} \right.$
- $q_A(H) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} h_i \, h_j \, \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(A)$

Extremum local sur un ouvert : condition nécessaire pour une fonction de classe $\mathcal{C}^1$

- $\Big(A \in \Omega$ est un point critique de $f\Big) \iff \Big(\nabla f(A) = 0\Big) \iff \Big(\forall i \in [\![1, n]\!],\ \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(A) = 0\Big)$

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{sur } \Omega \\ \bullet\ f \text{ admet un extremum local en } A \in \Omega \end{array}\right\} \Longrightarrow \Big(A \text{ est un point critique de } f\Big)$$

Extremum local sur un ouvert : condition suffisante pour une fonction de classe $\mathcal{C}^2$

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ f \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur } \Omega \\ \bullet\ f \text{ admet un point critique en } A \in \Omega \\ \bullet\ \forall H \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},\ q_A(H) < 0 \text{ (resp. } >0) \end{array}\right\} \Longrightarrow \Big(f \text{ admet un maximum (resp. min) local en } A\Big)$$

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ f \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur } \Omega \\ \bullet\ f \text{ admet un point critique en } A \in \Omega \\ \bullet\ \forall B \in \Omega, \forall H \in \mathbb{R}^n,\ q_B(H) \leqslant 0 (\text{resp. } \geqslant 0) \end{array}\right\} \Longrightarrow \Big(f \text{ admet un maximum (resp. min) global en } A\Big)$$

Extremum local sur un ouvert : cas $n = 2$

(méthodes et notations de Monge)

Si $f : \left\{\begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & f(x, y) \end{array}\right.$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $A \in \Omega$ et $\left\{\begin{array}{l} r = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) \\ s = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A) \\ t = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A) \end{array}\right.$

$$\Big(A \text{ est un point critique de } f \text{ et } rt - s^2 > 0\Big) \Longrightarrow \left(\begin{array}{l} A \text{ est un extremum local :} \\ \text{c'est un maximum local si } r < 0 \\ \text{c'est un minimum local si } r > 0 \end{array}\right)$$

$$\Big(A \text{ est un point critique de } f \text{ et } rt - s^2 < 0\Big) \Longrightarrow \left(\begin{array}{l} A \text{ est un point selle (ou col)} \\ \text{et n'est pas un extremum local} \end{array}\right)$$

$$\Big(A \text{ est un point critique de } f \text{ et } rt - s^2 = 0\Big) \Longrightarrow \Big(\text{On ne peut rien conclure pour l'instant}\Big)$$

Extremums sous contrainte d'égalités linéaires

Soient $g_1, .., g_p \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, $b_1, ..., b_p \in \mathbb{R}$, f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert Ω

$\mathcal{C}$ l'ensemble des $X \in \mathbb{R}^n$ solutions du système $\left\{\begin{array}{c} g_1(X) = b_1 \\ \vdots \\ g_p(X) = b_p \end{array}\right.$

et $\mathcal{H}$ l'ensemble des solutions du système homogène associé, alors

- $\mathcal{H}^\perp = vect\,(\nabla g_i\ ,\ 1 \leqslant i \leqslant p)$ (Rq : les fonctions ∇g_i sont constantes sur $\mathbb{R}^n$)
- $\Big(A \in \mathcal{C}$ est un extremum local de la restriction de f à $\mathcal{C}\Big) \Longrightarrow \Big(\nabla f(A) \in \mathcal{H}^\perp\Big)$

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ f \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur } \Omega \\ \bullet\ \nabla f(A) \in \mathcal{H}^\perp \\ \bullet\ \forall B \in \mathcal{C}, \forall H \in \mathcal{H},\ q_B(H) \leqslant 0 (\text{resp. } \geqslant 0) \end{array}\right\} \Longrightarrow \left(\begin{array}{l} \text{la restriction de } f \text{ à } \mathcal{C} \text{ admet} \\ \text{un maximum (resp. min) global sur } \mathcal{C} \text{ en } A \end{array}\right)$$

3 Probabilités

3.1 Dénombrement

Parties d'un ensemble

Si E désigne un ensemble de cardinal $n \in \mathbb{N}$,

- $card\,(\mathcal{P}(E)) = 2^n$
- $card\Big\{A \subset E / card(A) = k\Big\} = \dbinom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} = \dfrac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!}$ (pour $k \in [\![0, n]\!]$)

Suite d'éléments

Si E désigne un ensemble de cardinal $n \in \mathbb{N}$,

- $card\Big(\Big\{(a_1, ..., a_k)/a_1, ..., a_k \in E,$ distincts 2 à $2\Big\}\Big) = A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)...(n-k+1)$

Cardinal d'une union de 2 ou 3 parties

Si E désigne un ensemble fini et $A, B, C \subset E$,

$$card\,(A \cup B) = card(A) + card(B) - card(A \cap B)$$

$$\begin{aligned} card\,(A \cup B \cup C) = & card(A) + card(B) + card(C) \\ & - card(A \cap B) - card(A \cap C) - card(B \cap C) \\ & + card(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

Cardinal d'une union de n parties : formule du crible (ou formule de Poincaré)

Si E désigne un ensemble fini et $A_1, ..., A_n$ des parties de E, alors

$$card\,(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) = \sum_{i=1}^{n} card(A_i) - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} card(A_i \cap A_j) + \ldots + (-1)^{k+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} card(A_{i_1} \cap ... \cap A_{i_k}) + \ldots + (-1)^{n+1} card(A_1 \cap ... \cap A_n)$$

$$card\,(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) = \sum_{k=1}^{n} \left((-1)^{k+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} card(A_{i_1} \cap ... \cap A_{i_k}) \right)$$

3.2 Probabilité : définitions et propriétés

Définition

Si Ω est un ensemble, si $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ est une tribu sur Ω, et si $P : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \longrightarrow & [0,1] \\ A & \longmapsto & P(A) \end{array} \right.$,

$$\Big(P \text{ est une probabilité}\Big) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \bullet\ P(\Omega) = 1 \\ \bullet\ \forall (A_i)_{i \in \mathbb{N}} \text{ famille} \\ \text{d'évènements 2 à 2 disjoints } P\Big(\bigcup_{i=0}^{+\infty} A_i\Big) = \sum_{i=0}^{+\infty} P(A_i) \end{array} \right.$$

Formules

Si A, B sont des évènements, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Si A, B sont des évènements incompatibles (ie disjoints), $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

$P(\overline{A}) = P(\Omega \setminus A) = 1 - P(A)$

$P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$

$\Big(A \subset B\Big) \Longleftrightarrow \Big(\text{"L'évènement } A \text{ implique l'évènement } B\text{"}\Big) \Longrightarrow \Big(P(A) \leqslant P(B)\Big)$

Propriété de limite monotone

Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille croissante d'évènements, alors $P\Big(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\Big) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n)$

Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille décroissante d'évènements, alors $P\Big(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\Big) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n)$

Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille quelconque d'évènements, alors $\begin{cases} P\Big(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\Big) = \lim_{n\to+\infty} P(\bigcup_{k=0}^{n} A_k) \\ P\Big(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\Big) = \lim_{n\to+\infty} P(\bigcap_{k=0}^{n} A_k) \end{cases}$

Evénements indépendants

On fixe $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.

$\Big(A \text{ et } B \text{ sont deux évènements indépendants}\Big) \Longleftrightarrow \Big(P(A \cap B) = P(A)P(B)\Big)$

$\Big(A \text{ et } B \text{ sont deux évènements indépendants}\Big) \Longleftrightarrow \Big(P_B(A) = P(A)\Big)$ (utilisable si $P(B) \neq 0$)

$\Big((A_i)_{i\in[\![1,n]\!]} \text{ est une famille d'évènements indépendants}\Big) \Longleftrightarrow \Big(\forall J \subset [\![1,n]\!], P\Big(\bigcap_{j\in J} A_j\Big) = \prod_{j\in J} P(A_j)\Big)$

$\Big((A_i)_{i\in\mathbb{N}} \text{ est une fam. infinie d'évè. indép.}\Big) \Longleftrightarrow \Big(\forall J \subset \mathbb{N} \text{ avec } J \text{ finie}, P\Big(\bigcap_{j\in J} A_j\Big) = \prod_{j\in J} P(A_j)\Big)$

Formule du crible (ou formule de Poincaré)

Si $A_1, ..., A_n$ sont des évènements, alors

$$P(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} P(A_i \cap A_j) + \ldots + (-1)^{k+1} \sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_k\leqslant n} P(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}) + \ldots + (-1)^{n+1} P(A_1 \cap \ldots \cap A_n)$$

$$P(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) = \sum_{k=1}^{n} \left((-1)^{k+1} \sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_k\leqslant n} P(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}) \right)$$

Système complet d'événements

Si I est une partie de $\mathbb{N}$ et $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'évènements,

$\Big((A_i)_{i\in I} \text{ est un système complet d'évènements}\Big) \Longleftrightarrow \Big((A_i)_{i\in I} \text{ forme une partition de } \Omega\Big)$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \bullet \bigcup_{i\in I} A_i = \Omega \\ \bullet \forall i, j \in I, \text{ si } i \neq j \text{ alors } A_i \cap A_j = \emptyset \end{cases}$$

3.3 Probabilités conditionnelles

On fixe $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.

<u>Définition</u>

Si B est un évènement tel que $P(B) \neq 0$, alors $P_B : \begin{cases} \mathcal{A} & \longrightarrow & [0,1] \\ A & \longmapsto & \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} \end{cases}$ est une probabilité.

<u>Formule des probabilités composées</u>

Si $A_1, ..., A_n$ sont des évènements avec $P(A_1 \cap ... \cap A_{n-1}) \neq 0$, alors
$P(A_1 \dots A_n) = P(A_1) * P_{A_1}(A_2) * P_{A_1 \cap A_2}(A_3) * \dots * P_{A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n)$

<u>Formule des probabilités totales</u>

Si $(A_i)_{i \in I}$ est un système complet d'évènements de probabilité tous $\neq 0$, et B un évènement,
$P(B) = \sum_{i \in I} P(B \cap A_i) = \sum_{i \in I} P(A_i)\, P_{A_i}(B)$

<u>Formule de Bayes</u>

Si $(A_i)_{i \in I}$ est un système complet d'évènements de probabilité tous $\neq 0$,
si B est un évènement de probabilité non nulle et si $i_0 \in I$, alors
$$P_B(A_{i_0}) = \frac{P(A_{i_0})\, P_{A_{i_0}}(B)}{\sum_{i \in I} P(A_i) P_{A_i}(B)}$$

3.4 Variables aléatoires réelles discrètes

On notera "V.A.R." pour "variable aléatoire réelle"

<u>Définition</u>

• Si $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est une V.A.R., alors
$$\Big(X \text{ est une V.A.R. discrète}\Big) \iff \Big(X(\Omega) \text{ est dénombrable}\Big)$$
$$\iff \Big(X(\Omega) \text{ fini ou bien en bijection avec } \mathbb{N}\Big)$$

<u>Somme de variables aléatoires</u>

• Si X et Y sont 2 variables aléatoires discrètes indépendantes, alors

$$\forall z \in (X+Y)(\Omega),\ P(X+Y=z) = \sum_{\begin{cases} x \in X(\Omega) \\ z-x \in Y(\Omega) \end{cases}} P\Big((X=x) \cap (Y=z-x)\Big)$$

Fonction de répartition

Si X est une V.A.R., sa fonction de répartition est $F_X : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & [0,1] \\ x & \longmapsto & P(X \leqslant x) \end{cases}$

- F_X est croissante sur $\mathbb{R}$.
- F_X est continue à droite en tout point de $\mathbb{R}$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$
- $\forall a, b \in \mathbb{R}$ avec $a \leqslant b$, $F_X(b) - F_X(a) = P(X \in [a, b[)$
- Si $X(\Omega) = \{x_1, ..., x_n\}$ avec $x_1 < x_2 < ... < x_n$,
  alors $\forall i \in [\![2, n]\!]$, $P(X = x_i) = F_X(x_i) - F_X(x_{i-1})$ et $P(X = x_1) = F_X(x_1)$

Indépendance de V.A.R.

- Si X et Y sont deux V.A.R. discrètes,
$\Big(X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes}\Big) \Longleftrightarrow \Big(\forall a \in X(\Omega), \forall b \in Y(\Omega), P(X = a \cap Y = b) = P(X = a)P(Y = b)\Big)$
- Si $X_1, ..., X_n$ sont des V.A.R. discrètes,

$$\Big(X_1, ..., X_n \text{ sont indépendantes}\Big) \Longleftrightarrow \Big(\begin{cases} \forall x_1 \in X_1(\Omega) \\ \vdots \\ \forall x_n \in X_n(\Omega) \end{cases}, \ P\Big(\bigcap_{i=1}^{n} (X_i = x_i)\Big) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i = x_i)\Big)$$

Espérance : Définition

- Si X est une V.A.R. discrète :

  Si $X(\Omega) = \{x_1, ..., x_n\}$ alors $E(X) = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k \, P(X = x_k)$

  Si $X(\Omega) = \{x_i, \ i \in \mathbb{N}^*\}$ alors $E(X) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} x_k \, P(X = x_k)$, si la série converge absolument.

Theorèmes de transfert

- Si X est une V.A.R. discrète avec $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$, si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et si $g(X)$ est une variable aléatoire, alors sous réserve de convergence absolue :

$$E(g(X)) = \sum_{i \in I} g(x_i) P(X = x_i)$$

- Si X et Y sont des variables aléatoires discrètes et si $Z = g(X, Y)$ est une variable aléatoire, alors sous réserve de convergence absolue,

$$E\big(g(X, Y)\big) = \sum_{x \in X(\Omega), \ y \in Y(\Omega)} g(x, y) \, P(X = x \cap Y = y)$$

3.5 Variables aléatoires réelles à densité

Définition d'une densité

- $\Big(f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une densité$\Big) \Longleftrightarrow \begin{cases} \bullet\ f \text{ est à valeurs dans } \mathbb{R}^+ \\ \bullet\ f \text{ est continue sur } \mathbb{R} \text{ privé d'un nombre fini de points} \\ \bullet\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt \text{ converge et vaut } 1 \end{cases}$

- Si $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est une V.A.R., alors

$$\Big(X \text{ admet } f_X \text{ pour densité}\Big) \Longleftrightarrow \Big(\forall x \in \mathbb{R},\ P(X \leqslant x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt\Big)$$
$$\Longrightarrow \Big(F'_X(x) = f_X(x) \text{ pour tout réel } x \text{ où } f_X \text{ est continue}\Big)$$

Somme de variables aléatoires

- Si X et Y sont 2 variables aléatoires à densités (f_X et f_Y), indépendantes, alors

$h(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\, f_Y(x-t)\,dt$ est une densité de $X+Y$.

(Il faudrait en toute rigueur vérifier que f_X ou f_Y est bornée pour que ce résultat soit vrai, mais dans la pratique on ne vérifie jamais cette hypothèse)

Indépendance de V.A.R.

- Si X et Y sont deux V.A.R. à densité,

$\Big(X$ et Y sont indépendantes$\Big) \Longleftrightarrow \Big(\forall x, y \in \mathbb{R},\ P(X \leqslant x \cap Y \leqslant y) = P(X \leqslant x)\, P(Y \leqslant y)\Big)$

- Si $X_1, ..., X_n$ sont des V.A.R. à densité,

$\Big(X_1, ..., X_n$ sont indépendantes$\Big) \Longleftrightarrow \Big(\forall (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n, P\Big(\bigcap_{i=1}^{n} (X_i \leqslant x_i)\Big) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i \leqslant x_i)\Big)$

Espérance : Définition

- Si X est une V.A.R. à densité :

Si f_X est une densité de X, alors $E(X) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\, f_X(t)\,dt$ si l'intégrale converge absolument.

Theorème de transfert

- Si X est une V.A.R. à densité f_X,

si $X(\Omega)$ est un intervalle I d'extrémités a et b (avec $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$),
si φ est continue sur I éventuellement privé d'un nombre fini de points,

$\Big(E\big(\varphi(X)\big)$ existe et $E\big(\varphi(X)\big) = \displaystyle\int_a^b \varphi(t)\, f_X(t)\,dt\Big) \Longleftrightarrow \Big(\displaystyle\int_a^b \varphi(t)\, f_X(t)\,dt$ converge absolument$\Big)$

3.6 Moments d'une variable aléatoire réelle

Espérance : premières propriétés

Si X et Y admettent des espérances, alors

- $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $E(\lambda X + Y) = \lambda\, E(X) + E(Y)$
- $\Big(X$ et Y indépendantes$\Big) \Longrightarrow \Big(E(XY) = E(X)E(Y)\Big)$

- $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ E(\lambda) = \lambda$
- $\begin{cases} X \geqslant 0 \text{ (p.s.)} \\ E(X) = 0 \end{cases} \Longrightarrow X = 0 \text{ (p.s.)}$
- $\Big(X \geqslant 0 \text{ (p.s.)}\Big) \Longrightarrow \Big(E(X) \geqslant 0\Big)$
- $\Big(X \leqslant Y \text{ (p.s.)}\Big) \Longrightarrow \Big(E(X) \leqslant E(Y)\Big)$

Variance, écart-type

Si $X, Y, X_1, ..., X_n$ sont des V.A.R. et sous réserve d'existence,

- $V(X) = E\Big(\ (X - E(X))^2\ \Big)$
- $V(X) = E\big(X(X-1)\big) + E(X) - \big(E(X)\big)^2$
- $V(X) = E\big(X(X+1)\big) - E(X) - \big(E(X)\big)^2$
- $V(aX + b) = a^2 V(X)$ (pour $a, b \in \mathbb{R}$)
- $\Big(V(X) = 0\Big) \Longrightarrow \Big(X \text{ est constante (p.s.)}\Big)$
- $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$
- $\sigma(aX + b) = |a|\ \sigma(X)$ (pour $a, b \in \mathbb{R}$)
- $\Big(X, Y \text{ indépendantes}\Big) \Longrightarrow \Big(V(X+Y) = V(X) + V(Y)\Big)$
- $\Big(X_1, ..., X_n \text{ indépendantes}\Big) \Longrightarrow \Big(V\Big(\sum_{i=1}^{n} X_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i)\Big)$

Covariance

Si $X, Y, Z, X_1, ..., X_n$ sont des V.A.R., si $a, b \in \mathbb{R}$, on a sous réserve d'existence :

- $cov(X, Y) = E\Big(\ \big(X - E(X)\big)\ \big(Y - E(Y)\big)\ \Big)$
- $cov(X, Y) = E(XY) - E(X)\,E(Y)$
- $\Big(X, Y \text{ indépendantes}\Big) \Longrightarrow \Big(cov(X, Y) = 0\Big)$
- $cov(aX + bY, Z) = a\,cov(X, Z) + b\,cov(Y, Z)$
- $V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2\,cov(X, Y)$
- $V\Big(\sum_{i=1}^{n} X_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} cov(X_i, X_j)$

Coefficient de corrélation linéaire

Si X, Y sont deux V.A.R. admettant chacune une variance non nulle,

- $\rho(X, Y) = \dfrac{cov(X, Y)}{\sigma(X)\,\sigma(Y)}$
- $\Big|\rho(X, Y)\Big| \leqslant 1$
- $\Big(\ \Big|\rho(X, Y)\Big| = 1\Big) \Longleftrightarrow \Big(\exists a, b \in \mathbb{R} / Y = aX + b \text{ p.s.}\Big)$

Moments et moments centrés

Pour $r \in \mathbb{N}$,

- $m_r(X) = E(X^r)$ est, sous réserve d'existence, le <u>moment d'ordre r</u> de X.
- $\mu_r(X) = E\Big(\ (X - E(X))^r\Big)$ est, sous réserve d'existence, le <u>moment centré d'ordre r</u> de X.

Variable aléatoire centrée réduite

Si X est une variable aléatoire admettant une espérance m et une variance $\sigma^2 > 0$,
la variable aléatoire centrée réduite associée à X est :

$X^* = \dfrac{X - E(X)}{\sqrt{V(X)}}$ et on a $E(X^*) = 0$ et $V(X^*) = 1$

Espérance conditionnelle

$$E(X|A) = \Big(\text{Espérance de } X \text{ pour } P_A\Big) = \sum_{x \in X(\Omega)} x\, P_A(X = x)$$

Formule de l'espérance totale

Si $(A_i)_i \in I$ est un SCE d'évènements de probabilités tous non nulles, alors :

$\Big(X$ admet une espérance pour $P\Big) \Longleftrightarrow \Big(X$ admet une espérance pour chacune des $P_{A_i}\Big)$

et alors $E(X) = \displaystyle\sum_{i \in I} P(A_i)\, E(X|A_i)$

3.7 Lois discrètes usuelles

Loi	Notation	$X(\Omega)$	$P(X = k)$	$E(X)$	$V(X)$
Loi uniforme	$\mathcal{U}\Big([\![1, n]\!]\Big)$	$[\![1, n]\!]$	$\dfrac{1}{n}$	$\dfrac{n+1}{2}$	$\dfrac{n^2-1}{12}$
Loi de Bernoulli	$\mathcal{B}(p)$	{0,1}	$P(X = 1) = p$ $P(X = 0) = 1 - p$	p	$p(1-p)$
Loi binomiale	$\mathcal{B}(n, p)$	$[\![0, n]\!]$	$\dbinom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$
Loi hypergéométrique	$\mathcal{H}(n, N, p)$	$\subset [\![0, n]\!]$ (cf dessous)	$\dfrac{\dbinom{Np}{k}\dbinom{N-Np}{n-k}}{\dbinom{N}{n}}$	np	Hors Prgm
Loi géométrique	$\mathcal{G}(p)$	$\mathbb{N}^*$	$q^{k-1}\, p$ $(q = 1-p)$	$\dfrac{1}{p}$	$\dfrac{q}{p^2}$
Loi de Poisson	$\mathcal{P}(\lambda)$	$\mathbb{N}$	$e^{-\lambda}\, \dfrac{\lambda^k}{k!}$	λ	λ

Loi uniforme

Modélise le résultat d'une expérience dont les résultats apparaissent avec la même probabilité

- Si $a, b \in \mathbb{Z}$ et $a \leqslant b$, alors $\Big(X \hookrightarrow \mathcal{U}\big([\![a, b]\!]\big)\Big) \Longleftrightarrow \begin{cases} \bullet\ X(\Omega) = [\![a, b]\!] \\ \bullet\ \forall k \in [\![a, b]\!],\ P(X = k) = \dfrac{1}{b-a+1} \end{cases}$
- Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}\big([\![a, b]\!]\big)$, alors $E(X) = \dfrac{a+b}{2}$ et $V(X) = \dfrac{(b-a+1)^2 - 1}{12}$

Loi de Bernoulli

Modélise le résultat d'une expérience dont le résultat n'a que 2 issues possibles.

- $\Big(X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)\Big) \Longleftrightarrow \Big(\exists X_1, ..., X_n$ V.A.R. indépendantes, de loi $\mathcal{B}(p)$, telles que $X = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i\Big)$

Loi binomiale

Modélise le nombre de succès au cours de n expériences indépendantes de probabilité de succès p.

- $\Big(\begin{cases} X_1 \hookrightarrow \mathcal{B}(n_1,p) \\ X_2 \hookrightarrow \mathcal{B}(n_2,p) \end{cases}$ et X_1, X_2 indépendantes$\Big) \Longrightarrow \Big(X_1 + X_2 \hookrightarrow \mathcal{B}(n_1+n_2,p)\Big)$

Loi hypergéométrique

Modélise le nombre d'objets de type 1 piochés au cours de n tirages sans remise parmi N objets dont une proportion p seulement est de type 1.
(ce qui fait Np objets de type 1 et $N - Np$ objets de type 2)

- $X(\Omega) = [\![max\big(0, n-(N-Np)\big), min(Np, n)]\!]$
- Si $X_N \hookrightarrow \mathcal{H}(n,N,p)$ et si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$, alors $\Big(X_N$ tend en loi vers X quand N tend vers $+\infty\Big)$
- $V(X) = \dfrac{np(1-p)}{N-1}(N-n)$

Loi géométrique

Modélise la date du premier succès au cours d'une infinité d'expériences indépendantes de probabilité de succès p.

- $\Big(X$ suit une loi géométrique$\Big) \Longleftrightarrow \begin{cases} \bullet\ P(X=1) \in]0,1[\\ \bullet\ \forall k, \ell \in \mathbb{N}^*,\ P_{(X>k)}(X > k+\ell) = P(X > \ell) \end{cases}$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \bullet\ P(X=1) \in]0,1[\\ \bullet\ \forall k, n \in \mathbb{N}^*,\ P_{(X>k)}(X = k+n) = P(X = n) \end{cases}$$

Loi de Poisson

Modélise (intuitivement seulement) le nombre de voitures passant sous un pont pendant une durée λ, ou le nombre d'atomes d'uranium qui fissionnent pendant une durée λ, par exemple.

- $\Big(\begin{matrix} X_1 \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_1) \\ X_2 \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_2) \end{matrix}$ et X_1, X_2 indépendantes$\Big) \Longrightarrow \Big(X_1 + X_2 \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_1+\lambda_2)\Big)$
- Si $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}\Big(n, \dfrac{\lambda}{n}\Big)$ et $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$, alors $\Big(X_n$ converge en loi vers X quand n tend vers $+\infty\Big)$

3.8 Lois usuelles à densité

Loi	Notation	$X(\Omega)$	$f_X(t)$	$E(X)$	$V(X)$
Loi uniforme	$\mathcal{U}\Big([a,b]\Big)$	$[a,b]$	$\begin{cases} \dfrac{1}{b-a} \text{ si } t \in [a,b] \\ 0 \text{ si } t \notin [a,b] \end{cases}$	$\dfrac{a+b}{2}$	$\dfrac{(b-a)^2}{12}$
Loi exponentielle	$\mathcal{E}(\lambda)$	$\mathbb{R}^+$	$\begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \lambda\, e^{-\lambda t} & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$	$\dfrac{1}{\lambda}$	$\dfrac{1}{\lambda^2}$
Loi γ	$\gamma(\nu)$	$\mathbb{R}^+$	$\begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \dfrac{1}{\Gamma(\nu)} t^{\nu-1} e^{-t} & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$	ν	ν
Loi Γ	$\Gamma(b,\nu)$	$\mathbb{R}^+$	$\begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \dfrac{1}{\Gamma(\nu)} \dfrac{t^{\nu-1} e^{-t/b}}{b^{v}} & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$	$b\,\nu$	$b^2\,\nu$
Loi normale centrée réduite	$\mathcal{N}(0,1)$	$\mathbb{R}$	$\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{t^2}{2}}$	0	1
Loi normale	$\mathcal{N}(m,\sigma^2)$	$\mathbb{R}$	$\dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}$	m	σ^2

<u>Loi uniforme</u>

- $\Big(X \hookrightarrow \mathcal{U}\big([0,1]\big)\Big) \Longleftrightarrow \Big(Y = a + (b-a)X \hookrightarrow \mathcal{U}\big([a,b]\big)\Big)$
- Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}\big([a,b]\big)$, alors $F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leqslant a \\ \dfrac{t-a}{b-a} & \text{si } t \in [a,b] \\ 1 & \text{si } t \geqslant b \end{cases}$

<u>Loi exponentielle</u>

- $\Big(X \hookrightarrow \mathcal{E}(1)\Big) \Longleftrightarrow \Big(\dfrac{1}{\lambda} X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)\Big)$
- Si $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$, alors $\forall t \in \mathbb{R},\ F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 - e^{-\lambda t} & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$
- Caractérisation de la loi exponentielle par l'absence de mémoire :

$\Big(X \text{ suit une loi exponentielle}\Big) \Longleftrightarrow \begin{cases} \bullet\ X(\Omega) = \mathbb{R}^+ \\ \bullet\ \forall s,t \in \mathbb{R}^+,\ P(X > s+t \mid X > t) = P(X > s) \end{cases}$

Loi γ et loi Γ

- $\Big(X \hookrightarrow \gamma(\nu)\Big) \Longleftrightarrow \Big(bX \hookrightarrow \Gamma(b,\nu)\Big)$ (pour tout $\nu, b > 0$)
- $\begin{cases} X_1, X_2, ..., X_n \text{ indépendantes} \\ X_1 \hookrightarrow \gamma(\nu_1) \\ \quad\vdots \\ X_n \hookrightarrow \gamma(\nu_n) \end{cases} \Longrightarrow \Big(\sum_{i=1}^{n} X_i \hookrightarrow \gamma\Big(\sum_{i=1}^{n} \nu_i\Big)\Big)$
- $\begin{cases} X_1, X_2, ..., X_n \text{ indépendantes} \\ X_1 \hookrightarrow \Gamma(b,\nu_1) \\ \quad\vdots \\ X_n \hookrightarrow \Gamma(b,\nu_n) \end{cases} \Longrightarrow \left(\sum_{i=1}^{n} X_i \hookrightarrow \Gamma\Big(b, \sum_{i=1}^{n} \nu_i\Big) \right)$
- $\Big(X \hookrightarrow \Gamma(b,\nu)\Big) \Longrightarrow \Big(\alpha X \hookrightarrow \Gamma(\alpha\, b, \nu)$ (si $\alpha > 0$) $\Big)$
- $\Big(X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)\Big) \Longleftrightarrow \Big(X \hookrightarrow \Gamma(\frac{1}{\lambda}, 1)\Big)$

Loi normale

- $\Big(X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)\Big) \Longleftrightarrow \Big(\sigma X + m \hookrightarrow \mathcal{N}(m,\sigma^2)\Big)$ (pour tout $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$)
- $\begin{cases} X_1, X_2, ..., X_n \text{ indépendantes} \\ X_1 \hookrightarrow \mathcal{N}(m_1,\sigma_1^2) \\ \quad\vdots \\ X_n \hookrightarrow \mathcal{N}(m_n,\sigma_n^2) \end{cases} \Longrightarrow \left(\sum_{i=1}^{n} X_i \hookrightarrow \mathcal{N}\Big(\sum_{i=1}^{n} m_i, \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2\Big) \right)$
- $\phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$
- $\forall x \in \mathbb{R},\ \phi(-x) = 1 - \phi(x)$

3.9 Convergences et approximations

Inégalité de Markov

Si X est une V.A.R. admettant une espérance, alors pour tout $\epsilon > 0$,

$P\Big(|X| \geqslant \epsilon\Big) \leqslant \dfrac{E(|X|)}{\epsilon}$

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Si X est une V.A.R. admettant un moment d'ordre 2, alors pour tout $\epsilon > 0$,

$P\Big(|X - E(X)| \geqslant \epsilon\Big) \leqslant \dfrac{V(X)}{\epsilon^2}$

Convergence en probabilité

$$\Big(X_n \underset{P}{\longrightarrow} X\Big) \Longleftrightarrow \Big(\forall \epsilon > 0,\ \lim_{n\to+\infty} P\big(|X_n - X| > \epsilon\big) = 0\Big)$$

Loi faible des grands nombres

Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de V.A.R. indépendantes,
admettant chacune la même espérance m et la même variance σ^2,

alors pour tout $\epsilon > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} P\big(|\overline{X_n} - m| \geqslant \epsilon\big) = 0$, où $\overline{X_n} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$.

Approximations classiques

- Si $X_N \hookrightarrow \mathcal{H}(n, N, p)$ et si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$, alors $\Big(X_N$ tend en loi vers X quand N tend vers $+\infty\Big)$
- Si $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}\Big(n, \dfrac{\lambda}{n}\Big)$ et $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$, alors $\Big(X_n$ converge en loi vers X quand n tend vers $+\infty\Big)$

Théorème de la limite centrée

Si $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables i.i.d.,
admettant une espérance m et une variance σ^2, et si $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ et si $\overline{X_n} = \dfrac{S_n}{n}$,

alors $S_n^* = \dfrac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{V(S_n)}} = \sqrt{n}\Big(\dfrac{\overline{X_n} - m}{\sigma}\Big)$ tend en loi vers la loi $\mathcal{N}(0,1)$, c'est-à-dire :

$$\lim_{n\to+\infty} P(a \leqslant S_n^* \leqslant b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\Big(-\frac{t^2}{2}\Big)\, dt \qquad \text{pour } a \leqslant b \text{ deux réels quelconques.}$$
$$= \phi(b) - \phi(a)$$

3.10 Estimation

Biais d'un estimateur

Si T_n est un estimateur de $g(\theta)$, alors sous réserve d'existence :
$\big($biais de $T_n\big) = b_{T_n}(\theta) = E(T_n) - g(\theta)$

Estimateur sans biais

$$\Big(\text{Un estimateur } T_n \text{ de } g(\theta) \text{ est } \underline{\text{sans biais}}\Big) \Longleftrightarrow \Big(\ b_{T_n}(\theta) = 0\ \Big)$$
$$\Longleftrightarrow \Big(\ E(T_n) = g(\theta)\ \Big)$$

Risque quadratique d'un estimateur

Si T_n est un estimateur de $g(\theta)$, alors sous réserve d'existence :
$\big($Risque quadratique de $T_n\big) = r_{T_n}(\theta) = E\Big(\ \big(T_n - g(\theta)\big)^2\ \Big) = b_{T_n}^2 + V(T_n)$

Asymptotiquement sans biais

Une suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'estimateurs de $g(\theta)$ est...

$$\Big(\text{asymptotiquement sans biais}\Big) \Longleftrightarrow \Big(\lim_{n\to+\infty} E(T_n) = g(\theta) \Big)$$

Suite convergente d'estimateurs

Une suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'estimateurs de $g(\theta)$ est...

$$\Big(\text{convergente}\Big) \Longleftrightarrow \Big(T_n \underset{P}{\longrightarrow} g(\theta) \Big) \Longleftrightarrow \Big(\forall\epsilon > 0, \lim_{n\to+\infty} P\big(\mid T_n - g(\theta) \mid > \epsilon\big) = 0\Big)$$

Intervalle de confiance

$$\Big([U_n, V_n] \text{ est un intervalle de confiance de } g(\theta) \text{ au niveau de confiance } 1-\alpha\Big)$$

$$\Longleftrightarrow \Big(P\big(U_n \leqslant g(\theta) \leqslant V_n\big) \geqslant 1-\alpha \quad (\text{pour tout } \theta)\Big)$$

BCE - CONCOURS 2008

Les épreuves écrites

L'INSEEC utilise les épreuves de la BCE-CCIP selon la grille ci-dessous. Le choix des coefficients d'écrits (total : 30) est équilibré mais privilégie néanmoins les langues, la culture générale et l'histoire - géographie politique du monde contemporain (voie scientifique), l'analyse économique et historique (voie économique) ou l'économie (voie technologique). Cette décision est en parfaite cohérence avec le projet pédagogique de l'INSEEC qui affiche une volonté claire d'internationalisation de son cursus (nombreux cours dispensés en anglais) et qui, depuis sa création, est la seule École de Management à avoir développé un Département "Conférences de Méthodes et Culture Générale" tel qu'il existe dans les Instituts d'Études Politiques.

Choix des épreuves écrites	Option Scientifique	Coef	Option Économique	Coef	Option Technologique	Coef	Option Littéraire	Coef
- Contraction de texte	Épreuve HEC	2	Épreuve HEC	2	Épreuve HEC	2	Épreuve HEC	2
- Première langue	IENA	7	IENA	7	IENA	4	IENA	6
- Deuxième langue	IENA	5	IENA	5	IENA	3	IENA	4
- Dissertation de culture générale	Épreuve ESC	5	Épreuve ESC	5	Épreuve ESC	4	-	
- Dissertation littéraire	-		-		-		Épreuve ESSEC	5
- Dissertation philosophique	-		-		-		Épreuve ESSEC	5
- Mathématiques	Épreuve EDHEC	5	Épreuve EDHEC	4	Épreuve ESC	4	-	
- Histoire, géographie économiques	Épreuve ESC	6	-		-		-	
- Analyse économique et historique	-		Épreuve ESC	7	-		-	
- Économie	-		-		Épreuve ESC	5	-	
- Histoire	-		-		-		Épreuve ESCP-EAP	4
- Techniques de gestion - Informatique & Droit	-		-		Épreuve ESC	8	-	
- Épreuve à option							Épreuve ESSEC	4
Total coefficients		30		30		30		30

À l'issue des épreuves écrites, le jury d'admissibilité de l'INSEEC se réunit et arrête la liste des candidats admissibles. Ceux-ci sont convoqués soit à Paris soit à Bordeaux en fonction de l'académie d'appartenance de leur classe préparatoire et d'une décision arrêtée par le jury d'admissibilité, dans le but d'équilibrer au mieux les calendriers de passage. Des dérogations sont possibles sur demande du candidat. **Les résultats d'admissibilité sont transmis aux candidats le jeudi 12 juin 2008.**

Les épreuves orales

Les épreuves orales se déroulent sur une journée, soit à Paris soit à Bordeaux. Les jurys sont composés de manière équilibrée de professeurs de classes préparatoires, de cadres d'entreprises, d'enseignants ou d'Anciens Élèves de l'INSEEC.
Les épreuves orales de l'INSEEC ont un double objectif :

- discerner l'aptitude du candidat à réussir et bénéficier pleinement des projets et programmes qui lui seront proposés : ouverture internationale, goût pour la communication et l'argumentaire, esprit d'entreprendre, sens de l'équipe…
- susciter une première rencontre entre le candidat et l'École.

	Entretien individuel	Entretien collectif	Langues Vivantes 1	Langues Vivantes 2	TOTAL
Coefficients INSEEC - Paris - Bordeaux	12	6	7	5	30

L'admission et l'inscription

L'inscription se fait par la procédure centralisée SIGEM 2008.

Quel que soit votre rang de classement (liste principale + liste complémentaire), c'est vous qui déciderez d'intégrer soit PARIS, soit BORDEAUX.

LES MÉMENTOS DE L'INSEEC

COLLECTION DIRIGÉE PAR ERIC COBAST

Retrouvez la collection 2007
sur www.inseec-france.com/mementos2007

Les « Mémentos de l'INSEEC » ont été conçus et rédigés par une équipe de professeurs des Classes Préparatoires particulièrement sensibilisés aux difficultés que rencontrent régulièrement leurs étudiants.
L'ambition des « Mémentos » n'est pas de se substituer d'une manière ou d'une autre aux cours annuels mais de proposer simplement des outils susceptibles d'accompagner avec efficacité la préparation des concours.

Collection Les mémentos de l'INSEEC 2007

N° 1 : Méthode de la dissertation de Culture Générale
N° 2 : La dissertation d'Histoire aux concours des Ecoles de Commerce
N° 3 : Méthode du résumé et de la synthèse de textes
N° 4 : Les mots de la Science
N° 5 : L'Anglais écrit des concours d'entrée des Ecoles de Commerce
N° 6 : Réussir l'entretien des Ecoles de Commerce

Collection Les mémentos de l'INSEEC 2008

N° 7 : Les mots de l'Action
N° 8 : La dissertation d'analyse économique
N° 9 : Les astuces de Maths
N° 10 : Formulaire de Maths
N° 11 : L'Espagnol aux concours d'entrée des Ecoles de Commerce
N° 12 : Réussir l'entretien des Ecoles de Commerce

mwp www.mwp.be

BUSINESS SCHOOL
INSEEC
PARIS • BORDEAUX

INSEEC
Secrétariat de la Collection Les Mémentos
H16 quai de Bacalan
33300 Bordeaux
Tél. : 05 56 01 77 26