Correction du DM 14

1.(a) Au bout de 1 tirage on a eu un seul numéro.

Donc $a_1 = 1$, $b_1 = c_1 = d_1 = 0$.

1.(b) Au bout de 2 tirages on eu en tout un ou deux numéros.

Donc $c_2 = d_2 = 0$

A_2 est réalisé si on a eu 2 fois la boule 1 ou 2 fois la boule 2 ou 2 fois la boule 3 ou 2 fois la boule 4.

Donc $\text{Card}\, A_2 = 4$.

Comme les tirages sont faits avec remise : $P(A_2) = \frac{4}{4^2} = \frac{1}{4}$

donc $\boxed{a_2 = \frac{1}{4}}$

De plus $b_2 = 1 - a_2 = \boxed{\frac{3}{4}}$

On peut aussi trouver ce résultat par dénombrement :

$\text{Card}(B_2) = A_4^2 = 4 \times 3$ donc $b_2 = \frac{4 \times 3}{4^2} = \frac{3}{4}$

1.(c) A_n est réalisé si on tire n fois la boule 1 ou ..... ou n fois la boule 4.

donc $\mathrm{Card}\, A_n = 4$

Comme on fait n tirages avec remise :

$$\mathbb{P}(A_n) = \frac{4}{4^n} \quad \text{ie} \quad \boxed{a_n = \frac{1}{4^{n-1}}}$$

1.(d) On cherche $\mathbb{P}_{B_3}(B_2)$.

D'après la formule de Bayes :

$$\mathbb{P}_{B_3}(B_2) = \frac{\mathbb{P}_{B_2}(B_3) \times \mathbb{P}(B_2)}{\mathbb{P}(B_3)}$$

or $\mathbb{P}_{B_2}(B_3) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ (on tire un n° égal à un des 2 précédents)

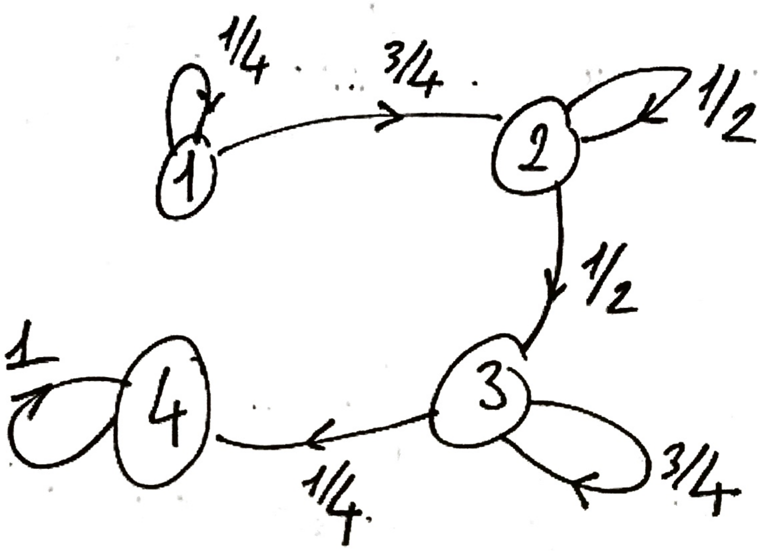
$$\mathbb{P}(B_2) = \frac{3}{4}$$

et $a_3 = \frac{1}{16}$, $d_3 = 0$, $c_3 = \frac{A_4^3}{4^3} = \frac{4 \times 3 \times 2}{4^3} = \frac{3}{8}$

donc $b_3 = \mathbb{P}(B_3) = 1 - \frac{3}{8} - \frac{1}{16} = \frac{9}{16}$

Finalement $\mathbb{P}_{B_3}(B_2) = \dfrac{\frac{1}{2} \times \frac{3}{4}}{\frac{9}{16}} = \dfrac{6}{9} = \boxed{\dfrac{2}{3}}$

2. (a)



2. (b) Pour n fixé la famille (A_n, B_n, C_n, D_n) est un s.c.e donc on peut utiliser la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(A_{n+1}) = \mathbb{P}(A_n).\mathbb{P}_{A_n}(A_{n+1}) + \mathbb{P}(B_n).\mathbb{P}_{B_n}(A_{n+1}) + \mathbb{P}(C_n).\mathbb{P}_{C_n}(A_{n+1}) + \mathbb{P}(D_n).\mathbb{P}_{D_n}(A_{n+1})$$

ie $a_{n+1} = \frac{1}{4}.a_n + 0.b_n + 0.c_n + 0.d_n$

De la même manière on trouve :

$$b_{n+1} = \frac{3}{4}.a_n + \frac{1}{2}b_n + 0.c_n + 0.d_n$$

$$c_{n+1} = 0.a_n + \frac{1}{2}.b_n + \frac{3}{4}.c_n + 0.d_n$$

$$d_{n+1} = 0.a_n + 0.b_n + \frac{1}{4}.c_n + 1.d_n$$

Les quatres relations donnent : $\boxed{U_{n+1} = A \times U_n}$

3.(a) On utilise la méthode du système linéaire.

$$\begin{cases} x_1 = y_1 \\ -3x_1 + x_2 = y_2 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = y_3 \\ -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = y_4 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = y_1 \\ x_2 = 3y_1 + y_2 \\ x_3 = 3y_1 + 2y_2 + y_3 \\ x_4 = y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \end{cases}$$

donc P est inversible et $\boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$

3.(b) On trouve $D = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

donc D est diagonale

3.(c) Par récurrence immédiate : $D = P^{-1} A P$

donne $A = PDP^{-1}$ puis $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = P.D^n.P^{-1}$

3. (d) Comme D est diagonale on a

$$\forall n \in \mathbb{N},\ D^n = \frac{1}{4^n}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix}$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$A^n = \frac{1}{4^n}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^n = \frac{1}{4^n}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 2^n & 0 & 0 \\ 3 & -2^{n+1} & 3^n & 0 \\ -1 & 2^n & -3^n & 4^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^n = \frac{1}{4^n}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3\times(2^n-1) & 2^n & 0 & 0 \\ 3\times(1-2^{n+1}+3^n) & -2^{n+1}+2\times 3^n & 3^n & 0 \\ -1+3\times 2^n-3^{n+1}+4^n & 2^n-2\times 3^n+4^n & 4^n-3^n & 4^n \end{pmatrix}$$

3. (e) On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $U_{n+1} = A.U_n$

donc par récurrence immédiate : $\forall n \geq 1$, $U_n = A^{n-1} \times U_1$

or $U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

donc pour tout $n \geq 1$: $U_n = \dfrac{1}{4^{n-1}} \begin{pmatrix} 1 \\ 3\times 2^{n-1} - 3 \\ 3 - 3\times 2^{n} + 3^{n} \\ -1 + 3\times 2^{n-1} - 3^{n} + 4^{n-1} \end{pmatrix}$

4.(a) On en déduit que pour tout $n \geq 1$:

$$\boxed{a_n = \frac{1}{4^{n-1}}} \qquad \boxed{c_n = \frac{3}{4^{n-1}} - \frac{6}{4^{n-1}} + 3.\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}}$$

$$\boxed{b_n = \frac{3}{2^{n-1}} - \frac{3}{4^{n-1}}} \qquad \boxed{d_n = -\frac{1}{4^{n-1}} + \frac{3}{2^{n-1}} - 3\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} + 1}$$

4.(b) Ce sont des sommes de suites géométriques.

On en déduit que $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \lim\limits_{n\to+\infty} c_n = 0}$

et $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} d_n = 1}$

Au bout d'un grand nombre de lancers, on aura presque sûrement eu les 4 numéros.