

EXERCICE 1 : Intégrales de Wallis

Soit $(W_n)_{n \geq 0}$ la suite des *intégrales de Wallis* définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}, W_n = \int_0^{\pi/2} (\sin t)^n dt.$$

1. A l'aide d'un changement de variable affine (i.e. du type $t=au+b$), montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, W_n = \int_0^{\pi/2} (\cos t)^n dt.$$

2. Montrer que la suite $(W_n)_{n \geq 0}$ est strictement positive.
3. Montrer que la suite $(W_n)_{n \geq 0}$ est décroissante. Conclusion ?
4. (a) Calculer W_0 et W_1 .

- (b) En intégrant par parties, donner une première relation liant W_{n+2} et W_n , puis en déduire que :

$$\forall n \geq 0, W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n.$$

- (c) Montrer que, pour tout $n \geq 0$, on a :

$$W_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad W_{2n+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

5. (a) Montrer que, pour tout $n \geq 0$, on a :

$$\frac{n+1}{n+2} \leq \frac{W_{n+1}}{W_n} \leq 1.$$

- (b) En déduire que $W_{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} W_n$.

- (c) Montrer que :

$$\forall n \geq 1, nW_nW_{n-1} = \frac{\pi}{2}.$$

- (d) En déduire que $W_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$, puis donner la limite de la suite $(W_n)_{n \geq 0}$.

6. En comparant l'équivalent trouvé en 5.(d) et la valeur exacte de W_{2n} trouvée en 4.(c), montrer que

$$\binom{2n}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}$$

7. On souhaite, dans cette question, démontrer la formule de Stirling :

$$n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Pour cela on admet qu'il existe un réel $C > 0$ tel que :

$$n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} C\sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

(Ce résultat sera prouvé dans le chapitre sur les séries numériques.)

- (a) Vérifier que : $\binom{2n}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2}}{C} \times \frac{2^{2n}}{\sqrt{n}}$

- (b) À l'aide de la question 6., conclure sur la valeur de C .

EXERCICE 2 : Dérivation discrète dans $\mathbb{K}[X]$

\mathbb{K} désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

On note $\mathbb{K}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans \mathbb{K} . Pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K}_n[X]$ désigne le sous-espace vectoriel formé des polynômes de degré inférieur ou égal à n .

Pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, on note $\Delta(P) = P(X + 1) - P(X)$.

1. (a) Montrer que Δ est un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$.
(b) On suppose que P est un polynôme constant : déterminer $\Delta(P)$.
On suppose que $\deg(P) \geq 1$: vérifier que $\deg[\Delta(P)] = \deg(P) - 1$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note Δ_n la restriction de Δ à $\mathbb{K}_n[X]$.
(a) Justifier que Δ_n est un endomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$.
(b) Déterminer le noyau de Δ_n .
(c) En déduire que $\text{Im}(\Delta_n) = \mathbb{K}_{n-1}[X]$.
3. À l'aide de la question précédente, montrer que Δ est surjectif.