PCSI 1 - DEVOIR MAISON N$^\circ$ 6 **Année scolaire 2017-2018**
A rendre le lundi 6 novembre 2017

<u>EXERCICE 1</u> : Fonctions usuelles

On considère la fonction définie sur l'intervalle $I = [0, \pi]$ par :

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{\sqrt{5 - 4\cos(x)}}$$

1. (a) Vérifier que f est bien définie sur I, et montrer que pour deux réels positifs a et b :

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{a - b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$$

   (b) Montrer que $\forall x \in I,\ f(x) - \sin(x) \leq 0$.
   Indication : ne pas utiliser de dérivée, mais utiliser l'identité de la question précédente.

   (c) Par une étude de fonction, montrer que $\forall x \in]0, \pi],\ \sin(x) < x$
   En déduire les solutions de l'équation $f(x) = x$ sur l'intervalle I.

2. Vérifier que :

$$\forall x \in I, \quad f'(x) = \frac{-2 \times \big(\cos(x) - 2\big) \times \left(\cos(x) - \dfrac{1}{2}\right)}{\big(5 - 4\cos(x)\big)^{3/2}}$$

   Étudier ensuite les variations de f sur l'intervalle I et tracer l'allure de sa courbe représentative **sans calculatrice**.
   On représentera les tangentes à la courbe aux points d'abscisses 0, $\dfrac{\pi}{3}$ et π.

On considère maintenant la fonction g définie sur $I = [0, \pi]$ par :

$$g(x) = \arccos\left(\frac{4 - 5\cos(x)}{5 - 4\cos(x)}\right)$$

3. (a) Étudier les variations de la fonction

$$\begin{array}{rccl} \phi : & [-1, 1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & \dfrac{4 - 5t}{5 - 4t} \end{array}$$

   En déduire que si $t \in]-1, 1[$, alors $\phi(t) \in]-1, 1[$.

   (b) Montrer que g est dérivable sur l'intervalle $]0; \pi[$ puis vérifier que :

$$\forall x \in]0, \pi[, \quad g'(x) = \frac{-3}{5 - 4\cos(x)}$$

   (c) On admet que g est dérivable en 0 et π avec $g'(0) = -3$ et $g'(\pi) = -\dfrac{1}{3}$. Tracer l'allure de la courbe de g, en s'aidant des tangentes aux points d'abscisses 0 et π.

4. Soit $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{3}\right]$.

   (a) Montrer qu'il existe un unique $z \in \left[\dfrac{\pi}{3}, \pi\right]$ tel que $f(x) = f(z)$.

   (b) Calculer $\cos\big(g(x)\big)$ et $\sin\big(g(x)\big)$.

(c) Montrer par un calcul que $f\big(g(x)\big) = f(x)$ et en déduire que $z = g(x)$.

5. Soient $x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ et $z = g(x)$.

   (a) **[*]** Exprimer $\cos(x+z)$ et $\cos(x-z)$ comme une fraction rationnelle en $\cos(x)$ uniquement.

   (b) **[*]** Dresser le tableau de variations des fonctions :

$$\psi_1 : \begin{array}{rcl} \left[0, \frac{\pi}{3}\right] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & t + g(t) \end{array} \qquad \text{et} \qquad \psi_2 : \begin{array}{rcl} \left[0, \frac{\pi}{3}\right] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & t - g(t) \end{array}$$

   En déduire le signe de $\cos\left(\frac{x+z}{2}\right)$ et $\cos\left(\frac{x-z}{2}\right)$.

   (c) **[*]** Exprimer $\cos\left(\frac{x+z}{2}\right)$ et $\cos\left(\frac{x-z}{2}\right)$ en fonction de $f(x)$.

6. (a) **[*]** Prouver que la restriction de f à l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ est bijective à valeurs dans un intervalle J à préciser. On note θ sa fonction réciproque.

   (b) **[*]** En utilisant la question 5., déterminer la fonction θ.