

EXERCICE 1 : Fonctions usuelles

On souhaite déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues et telles que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \sin(t) + 2 \times \int_0^t e^{t-x} f(x) dx$$

1. Soit f une fonction continue sur \mathbb{R} et telle que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \sin(t) + 2 \times \int_0^t e^{t-x} f(x) dx$$

- (a) Montrer que la fonction $\varphi : t \mapsto \int_0^t e^{-x} f(x) dx$ est dérivable sur \mathbb{R} et en déduire que f est dérivable sur \mathbb{R} .

- (b) Vérifier que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f'(t) - 3f(t) = \cos(t) - \sin(t)$$

- (c) Résoudre cette équation différentielle et en déduire une expression de $f(t)$.

2. Donner alors toutes les solutions du problème posé.