PCSI 1 - DEVOIR MAISON N ° 8 **Année scolaire 2017-2018**
A rendre le lundi 11 décembre 2017

EXERCICE 1 :

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.
On définit également trois suites (u_n), (v_n) et (w_n) par leurs premiers termes $u_0 = v_0 = w_0 = 0$ et les relations de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} & = 4u_n - 3v_n - 2w_n + 1 \\ v_{n+1} & = 2u_n - v_n - 2w_n + 2 \\ w_{n+1} & = -u_n + v_n + 3w_n - 3 \end{cases}$$

1. *Puissances successives de la matrice A*
   On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.
   (a) Calculer $P \times (P^2 - 3I_3)$. En déduire que P est inversible et calculer P^{-1}.
   (b) On pose $D = P^{-1}AP$. Calculer D^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (c) En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. *Obtention de l'expression des termes des trois suites récurrentes*
   (a) Vérifier que l'on a la relation : $C = AC + B$
   (b) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$.
   Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $X_{n+1} = AX_n + B$.
   (c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $X_n = C - A^nC$
   (d) En déduire les expressions de u_n, v_n, w_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.