PCSI1 - DEVOIR SURVEILLE N ° 8 **Année scolaire 2017-2018**
Samedi 5 mai 2018

Durée du devoir : 4h00.

Les calculatrices ne sont pas autorisées.

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

EXERCICE : Fonction Béta d'Euler

Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a \geq 1$ et $b \geq 1$, on pose :

$$\beta(a, b) = \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}\, dt.$$

1. (a) Montrer que cette intégrale est bien définie.
   (b) À l'aide d'un changement de variable affine, montrer que $\beta(a, b) = \beta(b, a)$.
   (c) Etablir que $\beta(a, b) = \beta(a + 1, b) + \beta(a, b + 1)$.
   (d) A l'aide du changement de variable $t = \cos^2(\theta)$ montrer que $\beta(3/2, 3/2) = \pi/8$.
   Indication : On pourra exprimer $\sin(2\theta)$ *et* $\sin^2(\theta)$ *en fonction de* $\sin(\theta)$ *et* $\cos(\theta)$.
   (e) Calculer $\beta(1, n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. (a) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\beta(a+1, b) = \dfrac{a}{b} \times \beta(a, b+1)$ et en déduire que $\beta(a + 1, b) = \dfrac{a}{a + b} \times \beta(a, b)$.
   (b) Calculer $\beta(n, p)$ pour tout $n, p \in \mathbb{N}^*$ en exprimant le résultat à l'aide de factoriels.
   (c) Montrer que pour tout $n, p \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$\beta\left(n + \frac{1}{2}, p + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2p)!(2n)!}{2^{2(n+p)}(n + p)!n!p!}\pi$$

3. On suppose dans cette question que $a \geq 2$ et $b \geq 2$.
   (a) On considère une fonction $h : [x, y] \longrightarrow \mathbb{R}$ où x, y sont deux réels tels que $x < y$.
   On suppose que h est de classe C^1 sur $[x, y]$ et on note M_1 le maximum de $\left|h'(t)\right|$ lorsque t décrit $[x, y]$.
   Justifier que M_1 est bien défini et que :
   $$\int_x^y h(t)\,dt = (y-x) \times h(x) + \int_x^y h'(t) \times (y-t)\,dt$$
   En déduire que :
   $$\left|\int_x^y h(t)\,dt - (y-x) \times h(x)\right| \leq M_1 \frac{(y-x)^2}{2}$$
   (b) Établir que la fonction $t \longmapsto t^{a-1}(1-t)^{b-1}$ est de classe C^1 sur $[0, 1]$.
   En lui appliquant le résultat précédent sur chacun des segments $[x_k, x_{k+1}]$, où $x_k = k/n$ avec $k \in [\![0, n-1]\!]$, montrer que :
   $$\left|\beta(a, b) - u_n\right| \leq \frac{a+b-2}{2n} \qquad \text{où } u_n = \frac{1}{n} \times \sum_{k=0}^{n-1} \left[\left(\frac{k}{n}\right)^{a-1} \times \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{b-1}\right]$$
   (c) En déduire un programme Python qui donne une valeur approchée de $\beta(a, b)$ à 10^{-3} près.

<u>PROBLEME</u> : Coeur et nilespace d'un endomorphisme

Dans tout ce problème, $\mathbb{K}$ désigne indifféremment $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Si $\mathbb{E}$ est un espace vectoriel, la notation $\mathcal{L}(\mathbb{E})$ désigne l'ensemble des endomorphismes de $\mathbb{E}$.

Si u est un endomorphisme de $\mathbb{E}$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, u^n désigne l'endomorphisme de $\mathbb{E}$ défini par récurrence par $u^0 = \mathrm{id}_{\mathbb{E}}$ et $u^{n+1} = u \circ u^n = u^n \circ u$.

<u>Partie I</u> : Résultats préliminaires

On se donne $\mathbb{E}$ un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et u un endomorphisme de $\mathbb{E}$.

1. (a) Montrer que : $\mathrm{Im}(u^2) \subseteq \mathrm{Im}(u)$
   (b) Montrer que : $\mathrm{Ker}(u) \subseteq \mathrm{Ker}(u^2)$
2. On suppose dans cette question seulement que $\mathbb{E}$ est de dimension finie.
   Montrer que : $\mathbb{E} = \mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Im}(u) \Longleftrightarrow \mathrm{Im}(u) = \mathrm{Im}(u^2) \Longleftrightarrow \mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Ker}(u^2)$
   Indication : on pourra appliquer le théorème du rang aux endomorphismes u et u^2.
3. $\mathbb{E}$ n'est plus supposé de dimension finie.
   (a) Montrer que : $\mathbb{E} = \mathrm{Ker}(u) + \mathrm{Im}(u) \Longleftrightarrow \mathrm{Im}(u) = \mathrm{Im}(u^2)$
   (b) Montrer que : $\mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Im}(u) = \left\{\overrightarrow{0}\right\} \Longleftrightarrow \mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Ker}(u^2)$
   (c) Conclure que : $\mathbb{E} = \mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Im}(u) \Longleftrightarrow \Big(\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Im}(u^2) \text{ et } \mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Ker}(u^2)\Big)$

Partie II : Un exemple

Dans cette question $\mathbb{E} = \mathbb{R}^3$et u est l'application définie par :

$$\begin{array}{rccl} u: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & u(x,y,z) = (4x - y + 5z, -2x - y - z, -4x + y - 5z) \end{array}$$

1. Vérifier que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
2. (a) Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(u)$ et une base de $\mathrm{Im}(u)$.
   (b) En déduire que la propriété $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Im}(u)$ est fausse.
3. (a) Donner l'expression analytique de u^2.
   (b) En déduire une base de $\mathrm{Ker}\,(u^2)$ et une base de $\mathrm{Im}\,(u^2)$.
   (c) Montrer que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(u^2) \oplus \mathrm{Im}(u^2)$.

Partie III : Cas général

Dans cette partie, $\mathbb{E}$ un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, et u un endomorphisme de $\mathbb{E}$.

On appelle *coeur* de l'endomorphisme u, noté C, la partie de $\mathbb{E}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{E}, \quad \left(x \in C \Longleftrightarrow \forall k \in \mathbb{N},\ x \in \mathrm{Im}(u^k) \right)$$

On appelle *nilespace* de l'endomorphisme u, noté N, la partie de $\mathbb{E}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{E}, \quad \left(x \in N \Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{N},\ x \in \mathrm{Ker}(u^k) \right)$$

1. Soit $k \in \mathbb{N}$.
   (a) Montrer que $\mathrm{Ker}(u^k)$ et $\mathrm{Im}(u^k)$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{E}$.
   (b) Montrer que, pour tout entier naturel n, $\mathrm{Ker}(u^k)$ et $\mathrm{Im}(u^k)$ sont stables par u^n.
2. (a) Vérifier que, pour tout $k \in \mathbb{N}$: $\mathrm{Ker}(u^k) \subseteq \mathrm{Ker}(u^{k+1})$ et $\mathrm{Im}(u^{k+1}) \subseteq \mathrm{Im}(u^k)$.
   (b) Montrer que C et N sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{E}$, et qu'ils sont stables par u.
   (c) Établir que : u est surjectif $\Longleftrightarrow C = \mathbb{E}$
   (d) Établir que : u est injectif $\Longleftrightarrow N = \{0_{\mathbb{E}}\}$
3. On suppose dans les questions 3.(a) et 3.(b) qu'il existe un rang $k \in \mathbb{N}^*$ tel que : $\mathrm{Im}(u^k) = \mathrm{Im}(u^{k+1})$
   (a) Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\mathrm{Im}(u^{k+n}) = \mathrm{Im}(u^k)$
   (b) On note r le **plus petit** entier k non nul tel que : $\mathrm{Im}(u^k) = \mathrm{Im}(u^{k+1})$. Montrer que :
      i. $C = \mathrm{Im}(u^r)$
      ii. $u(C) = C$
      iii. $\mathbb{E} = \mathrm{Ker}(u^r) + \mathrm{Im}(u^r)$ (utiliser les préliminaires)
4. On suppose dans les questions 4.(a) et 4.(b) qu'il existe un rang $k \in \mathbb{N}^*$ tel que : $\mathrm{Ker}(u^k) = \mathrm{Ker}(u^{k+1})$
   (a) Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\mathrm{Ker}(u^{k+n}) = \mathrm{Ker}(u^k)$
   (b) On note s le **plus petit** entier k non nul tel que $\mathrm{Ker}(u^k) = \mathrm{Ker}(u^{k+1})$. Montrer que :
      i. $N = \mathrm{Ker}(u^s)$
      ii. $\mathrm{Ker}(u^s) \cap \mathrm{Im}(u^s) = \{0_{\mathbb{E}}\}$ (utiliser les préliminaires)