PCSI1 * - DEVOIR SURVEILLE N$^\circ$8 **Année scolaire 2017-2018**
Samedi 5 mai 2018

Durée du devoir : 4h00.

Les calculatrices ne sont pas autorisées.

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

EXERCICE : Endomorphisme sur $C^0(\mathbb{R})$

Dans tout le problème, on désigne par n un entier naturel et par :
- $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n.
- $C^n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions réelles de classe C^n sur $\mathbb{R}$.

En particulier, $C^0(\mathbb{R})$ est l'espace vectoriel des fonctions réelles continues sur $\mathbb{R}$.

On identifie polynômes et fonctions polynomiales ; on considèrera donc que $\mathbb{R}_n[X] \subseteq C^0(\mathbb{R})$.

À toute fonction f appartenant à $C^0(\mathbb{R})$, on associe la fonction notée ϕf et définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \phi f(x) = \int_{x-1}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

On définit ainsi une application ϕ dont on se propose dans la suite d'étudier quelques propriétés.

1. Montrer que ϕ est un endomorphisme de $C^0(\mathbb{R})$.
2. Dans cette question, on étudie quelques propriétés de ϕf en fonction de celles de f.
   (a) Pour toute fonction continue f et tout nombre réel x, montrer que :
   $$\phi f(x) = \int_0^1 f(x+u-1)\,\mathrm{d}u$$
   (b) On suppose la fonction f paire (resp. impaire). Exprimer $\phi f(-x)$ en fonction de $\phi f(x+1)$.
   (c) On suppose la fonction f croissante (resp. décroissante). Montrer que ϕf est croissante (resp. décroissante).
   (d) On suppose que la fonction f a une limite L en $+\infty$ (resp. $-\infty$). Montrer que ϕf a aussi pour limite L en $+\infty$ (resp. $-\infty$).

3. Dans cette question on étudie l'endomorphisme induit par ϕ sur $\mathbb{R}_n[X]$.
   (a) Montrer que $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par ϕ.
   On note alors ϕ_n *l'endomorphisme induit par* ϕ *sur* $\mathbb{R}_n[X]$.
   (b) Montrer que ϕ_n est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
   (c) Montrer que s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et $P \in \mathbb{R}_n[X]$, tels que $P \neq 0$ et $\phi P = \lambda.P$, alors $\lambda = 1$.
4. Dans cette question, on étudie l'injectivité et la surjectivité de ϕ.
   (a) Montrer que, pour toute fonction f de $C^0(\mathbb{R})$, ϕf est de classe C^1 et préciser sa dérivée. Pour quelles valeurs du nombre entier j l'espace vectoriel $\phi\big(C^k(\mathbb{R})\big)$ est-il inclus dans $C^j(\mathbb{R})$?
   (b) Montrer que $\mathrm{Ker}(\phi)$ est formé des fonctions 1-périodiques et d'intégrale nulle sur une période, ie des $f \in C^0(\mathbb{R})$ telles que :
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x+1) = f(x) \qquad \text{et} \qquad \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0$$
   (c) L'endomorphisme ϕ est-il injectif ? sujectif ?
5. Dans cette question, on étudie les « éléments propres » de ϕ.
   (a) On considère un nombre réel λ tel qu'il existe une fonction non nulle f appartenant à $C^0(\mathbb{R})$ vérifiant $\phi f = \lambda.f$.
   Montrer que si $\lambda \neq 0$, alors f est nécessairement de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
   (b) Quelles sont les polynômes P pour lesquels $\phi P = P$?
   (c) Montrer, pour tout nombre réel $\lambda > 0$, qu'il existe une et une seule fonction exponentielle f définie par $f(x) = \mathrm{e}^{ax}$ ($a \in \mathbb{R}$) telle que $\phi f = \lambda.f$.
   (d) Montrer, pour tout nombre réel $\lambda > 1$, que la seule fonction $f \in C^0(\mathbb{R})$ bornée vérifiant $\phi f = \lambda.f$ est la fonction nulle.

<u>PROBLEME</u> : Opérateur de différence

Dans tout le texte, $\mathbb{N}$ est l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{R}$ l'ensemble des réels, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 1 et $\mathbb{R}_n[X]$ est l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré au plus n.
Pour $a < b$ dans $\mathbb{Z}$, on note $[\![a, b]\!]$ l'ensemble $[a, b] \cap \mathbb{Z}$.
Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note P_k le polynôme X^{k-1}. On rappelle que $\mathbb{R}_n[X]$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n+1$ dont la famille $(P_k)_{k \in [\![1,n+1]\!]}$ est une base. Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on note $\deg(P)$ le degré de P et, lorsque P est non nul, $cd(P)$ désigne le coefficient dominant de P, c'est-à-dire le coefficient du monôme $X^{\deg(P)}$.
Pour $k \in \mathbb{N}$ et $j \in [\![0, k]\!]$, le coefficient binomial $\displaystyle\binom{k}{j}$ vaut $\displaystyle\frac{k!}{j!(k-j)!}$.
Pour un ensemble E et $f : E \to E$, on définit l'application $f^k : E \to E$ par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ de la façon suivante :
$$f^0 = \mathrm{Id}_E \text{ et } f^{k+1} = f \circ f^k$$

Partie I : L'opérateur de différence

L'opérateur de différence est l'application δ définie par :

$$\begin{array}{rrcl} \delta : & \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ & P(X) & \mapsto & P(X+1) - P(X) \end{array}$$

On admettra dans la suite que δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

1. Pour un polynôme non constant $P \in \mathbb{R}_n[X]$, exprimer $\deg(\delta(P))$ et $cd(\delta(P))$ à l'aide de $\deg(P)$ et $cd(P)$.
2. En déduire le noyau $\mathrm{Ker}(\delta)$ et l'image $\mathrm{Im}(\delta)$ de l'endomorphisme δ.
3. Plus généralement, pour $j \in [\![1, n]\!]$, montrer les égalités suivantes :
$$\mathrm{Ker}(\delta^j) = \mathbb{R}_{j-1}[X] \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Im}(\delta^j) = \mathbb{R}_{n-j}[X] \tag{0.1}$$
4. On définit l'endomorphisme τ par $\tau = \delta + \mathrm{id}_{\mathbb{R}_n[X]}$. Pour $k \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{R}_n[X]$, exprimer $\delta^k(P)$ en fonction des $\tau^j(P)$ pour $j \in [\![0, k]\!]$.
5. Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Montrer que :
$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} P(j) = 0 \tag{0.2}$$
6. Dans cette question, on cherche tous les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_n[X]$ stables par l'application δ.
   (a) Pour P polynôme non nul de degré $d \leqslant n$, montrer que la famille $(P, \delta(P), \dots, \delta^d(P))$ est libre. Quel est l'espace vectoriel engendré par cette famille ?
   (b) En déduire que si V est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$ stable par δ et non réduit à $\{0\}$, il existe un entier $d \in [\![0, n]\!]$ tel que $V = \mathbb{R}_d[X]$.

Partie II : Étude d'une famille de polynômes

On considère la famille de polynômes

$$\begin{cases} H_0 = 1 \\ H_k = \dfrac{1}{k!} \displaystyle\prod_{j=0}^{k-1} (X - j) \qquad \text{pour } k \in [\![1, n]\!] \end{cases}$$

7. **Généralités.**
   (a) Montrer que la famille $(H_k)_{k \in [\![0,n]\!]}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
   (b) Calculer $\delta(H_0)$ et, pour $k \in [\![1, n]\!]$, exprimer $\delta(H_k)$ à l'aide de H_{k-1}.
   (c) Montrer que, pour $k, l \in [\![0, n]\!]$,
$$\delta^k(H_l)(0) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = l \\ 0 & \text{si } k \neq l \end{cases}$$
   (d) Montrer que, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$,
$$P = \sum_{k=0}^{n} (\delta^k(P))(0) H_k$$

8. **Polynômes à valeurs entières.**

   (a) Soit $k \in \mathbb{Z}$. Calculer $H_n(k)$. On distinguera trois cas : $k \in [\![0, n-1]\!]$, $k \geqslant n$ et $k < 0$. Pour ce dernier cas, on posera $k = -p$.

   (b) En déduire que $H_n(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$, c'est-à-dire que H_n est à valeurs entières sur les entiers.

   (c) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ à valeurs entières sur les entiers. Montrer que $\delta(P)$ est aussi à valeurs entières sur les entiers.

   (d) Montrer que $P \in \mathbb{R}_n[X]$ est à valeurs entières sur les entiers si et seulement si ses coordonnées dans la base $(H_k)_{k \in [\![0,n]\!]}$ sont entières.

   (e) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $d \in \mathbb{N}$. Montrer que si P est à valeurs entières sur les entiers alors $d!\,P$ est un polynôme à coefficients entiers. Étudier la réciproque.

Partie III : Généralisation de l'opérateur de différence et application

Pour une application $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$, on définit l'application

$$\delta(f) : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x+1) - f(x) \end{array}$$

9. (a) Montrer que $\delta(f)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Comparer $(\delta(f))'$ et $\delta(f')$.

   (b) Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x > 0$, exprimer $(\delta^n(f))(x)$ à l'aide des coefficients binomiaux $\binom{n}{j}$ et des $f(x+j)$ (où l'indice j appartient à $[\![0, n]\!]$).

   (c) Expliquer pourquoi, pour tout $x > 0$, il existe un $y_1 \in]0,1[$ tel que

$$(\delta(f))(x) = f'(x + y_1)$$

   (d) En déduire que pour tout $x > 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un $y_n \in]0, n[$ tel que

$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} f(x+j) = f^{(n)}(x + y_n) \qquad (*)$$

   On pourra procéder par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ et utiliser les trois questions précédentes.

10. On considère dans toute la suite de cette partie un réel α. On suppose que pour tout nombre p premier, p^α est un entier naturel. On se propose de montrer que α est alors un entier naturel.

    (a) Montrer que pour tout entier k strictement positif, k^α appartient à $\mathbb{N}^*$.

    (b) Montrer que α est positif ou nul.

    (c) On considère l'application f_α définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f_\alpha(x) = x^\alpha$. Montrer que α est un entier naturel si et seulement si l'une des dérivées successives de f_α s'annule en au moins un réel strictement positif.

11. On applique la relation $(*)$ à la fonction f_α et à l'entier $n = \lfloor \alpha \rfloor + 1$ (où $\lfloor \cdot \rfloor$ désigne la partie entière). On choisit désormais $x \in \mathbb{N}^*$.

    (a) Montrer que l'expression

$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} f_\alpha(x+j)$$

    est un entier relatif.

    (b) Les notations sont celles de la question 9.(d). Quelle est la limite de l'expression $f_\alpha^{(n)}(x+y_n)$ quand $x \in \mathbb{N}^*$ tend vers $+\infty$?

    (c) Conclure.