Correction du DS3

Exercice 1

1. (a) On fixe $x \in]0,\pi[$ (donc $\sin x \neq 0$).

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $P(n)$ le prédicat

$$" \sum_{k=0}^{n-1} \sin((2k+1)x) = \frac{\sin^2(nx)}{\sin x} "$$

Pour $n=1$: $\sum_{k=0}^{n-1} \sin((2k+1)x) = \sin(x)$ et $\frac{\sin^2(x)}{\sin x} = \sin x$.

donc $P(1)$ est vrai.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ pour lequel $P(n)$ est vrai.

Alors $$\sum_{k=0}^{n} \sin((2k+1)x) = \left(\sum_{k=0}^{n-1} \sin((2k+1)x)\right) + \sin((2n+1)x)$$

$$\overset{P(n)}{=} \frac{\sin^2(nx)}{\sin x} + \sin((2n+1)x) = \frac{\sin^2(nx) + \sin((2n+1)x).\sin x}{\sin x}$$

Mais $$\sin((2n+1)x).\sin(x) = \left(\cos((2n+1-1)x) - \cos((2n+1+1)x)\right)/2$$
$$= \left(\cos(2nx) - \cos(2(n+1)x)\right)/2$$
$$= \frac{1 - 2\sin^2(nx) - 1 + 2\sin^2((n+1)x)}{2}$$
$$= \sin^2((n+1)x) - \sin^2(nx)$$

On obtient : $\sum_{k=0}^{n} \sin((2k+1)x) = \frac{\sin^2((n+1)x)}{\sin x}$. Donc $P(n+1)$ est vrai

Par récurrence : $P(n)$ est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1.(b) $\sum_{k=0}^{n-1} \sin((2k+1)x) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{Im}\left(e^{i(2k+1)x}\right)$ ②

$$= \mathrm{Im}\left(\sum_{k=0}^{n-1} e^{i(2k+1)x}\right) = \mathrm{Im}\left(e^{ix} \times \sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{i2x}\right)^k\right)$$

$$= \mathrm{Im}\left(e^{ix} \times \frac{1-\left(e^{i2x}\right)^n}{1-e^{i2x}}\right)$$

car $e^{i2x} \neq 1$
car $2x \in]0, 2\pi[$
puisque $x \in]0, \pi[$.

Mais $e^{ix} \times \frac{1-\left(e^{i2x}\right)^n}{1-e^{i2x}} = e^{ix} \cdot \frac{1-e^{i2nx}}{1-e^{i2x}}$

$$= \cancel{e^{ix}} \times \frac{e^{inx}}{\cancel{e^{ix}}} \times \frac{e^{-inx}-e^{inx}}{e^{-ix}-e^{ix}}$$

$$= e^{inx} \times \frac{-2i\sin(nx)}{-2i\sin(x)} = \underbrace{\frac{\sin(nx)}{\sin x}}_{\in \mathbb{R}} \times e^{inx}$$

On retrouve que $\boxed{\sum_{k=0}^{n-1} \sin((2k+1)x) = \frac{\sin^2(nx)}{\sin(x)}}$

2. $\sin x + \sin(3x) - \sin(4x) + \sin(5x) + \sin(7x) = 0$

$$\iff \sum_{k=0}^{3} \sin\big((2k+1)x\big) = \sin(4x)$$

$$\iff \frac{\sin^2(4x)}{\sin x} = \sin(4x)$$

$$\iff \sin^2(4x) = \sin(x)\sin(4x)$$

$$\iff \sin(4x) = 0 \quad \text{ou} \quad \sin(4x) = \sin(x)$$

$$\iff 4x = 0\ [2\pi] \ \text{ou}\ 4x = \pi - 0\ [2\pi] \ \text{ou}\ 4x = x\ [2\pi] \ \text{ou}\ 4x = \pi - x\ [2\pi]$$

$$\iff x = 0\ \left[\tfrac{\pi}{4}\right] \ \text{ou}\ x = \tfrac{\pi}{4}\ \left[\tfrac{\pi}{2}\right] \ \text{ou}\ x = 0\ \left[\tfrac{2\pi}{3}\right] \ \text{ou}\ x = \tfrac{\pi}{5}\ \left[\tfrac{2\pi}{5}\right]$$

On cherche les solutions dans $]0,\pi[$:

$$\frac{\pi}{5} ; \frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{2} ; \frac{3\pi}{5} ; \frac{2\pi}{3} ; \frac{3\pi}{4}$$

Exercice 2

1. $P_{k+1} = (1 - a_{k+1}) \times P_k$

2. Pour $k \in \mathbb{N}^*$ on note $H(k)$ le prédicat

$$\text{"} P_k + \sum_{i=1}^{k} a_i \cdot P_{i-1} = 1 \text{"}$$

Pour $k=1$: $P_k + \sum_{i=1}^{k} a_i P_{i-1} = P_1 + a_1 \cdot P_0 = 1 - a_1 + a_1 \times 1 = 1$

donc $H(1)$ est vrai.

Hérédité Soit $k \in \mathbb{N}^*$ tq $H(k)$ est vrai.

Alors $P_{k+1} + \sum_{i=1}^{k+1} a_i \cdot P_{i-1} = (1 - a_{k+1}) \cdot P_k + \sum_{i=1}^{k} a_i \cdot P_{i-1} + a_{k+1} \cdot P_k$

$$= P_k + \sum_{i=1}^{k} a_i \cdot P_{i-1} \underset{H(k)}{=} 1$$

Donc $H(k+1)$ est vraie.

Par récurrence on en déduit que $H(k)$ est vrai pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

3.(a) $P_n = 0$ car $1 - \frac{n}{n} = 0$ (dernier terme du produit)

3.(b) Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$.

$$P_k = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \times \left(1 - \frac{2}{n}\right) \times \cdots \times \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \times \left(1 - \frac{k}{n}\right)$$

$$= \frac{n-1}{n} \times \frac{n-2}{n} \times \cdots \times \frac{n-k+1}{n} \times \frac{n-k}{n} = \frac{(n-1)!}{(n-k-1)!} \times \frac{1}{n^k} = \frac{k!}{n^k} \times \binom{n-1}{k}$$

3.(c) Pour $k=0$: $\frac{k!}{n^k}\times\binom{n-1}{k} = \frac{1}{1}\times 1 = 1 = P_0$

Pour $k=n$: $\frac{k!}{n^k}\binom{n-1}{k} = \frac{n!}{n^n}\times 0 = 0 = P_n$

Donc la formule de 3.(b) est vraie pour tout $k\in[\![0,n]\!]$.

4. D'après 2. avec $k=n$:

$$P_n + \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n}\times P_{i-1} = 1$$

ie $$\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n}\times \frac{(i-1)!}{n^{i-1}}\binom{n-1}{i-1} = 1$$

donc $$\sum_{i=1}^{n} \frac{i!}{n^i}\times\binom{n-1}{i-1} = 1$$

Comme i est une variable muette :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k!}{n^k}\times\binom{n-1}{k-1} = 1$$

Exercice 3

1. Soit $p\in[\![0,n]\!]$.

$$\sum_{k=0}^{n-p}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{n-k}{p}=\sum_{k=0}^{n-p}(-1)^k\frac{n!}{k!\cancel{(n-k)!}}\times\frac{\cancel{(n-k)!}}{p!(n-k-p)!}\times\frac{(n-p)!}{(n-p)!}$$

$$=\sum_{k=0}^{n-p}(-1)^k\times\binom{n}{p}\binom{n-p}{k}=\binom{n}{p}\times\sum_{k=0}^{n-p}(-1)^k\binom{n-p}{k}$$

$$=\boxed{\binom{n}{p}\times 0^{n-p}=\begin{cases}0 \text{ si } p\leq n-1\\ 1 \text{ si } p=n\end{cases}}$$

2.(a) La seule permutation de $\{1\}$ est l'identité donc $D_1=0$.

Il existe deux permutations de $\{1;2\}$ qui sont 12 et 21.

Donc $D_2=1$

Il existe 6 permutations de $\{1;2;3\}$: ~~123~~ ~~132~~ ~~213~~ 231 312 ~~321~~

et donc $D_3=2$.

2.(b) Une permutation de $[\![1,n]\!]$ a un nombre de points fixes k qui peut prendre toutes valeurs de $[\![0,n]\!]$.

Le nombre total de permutations de $[\![1,n]\!]$ est $n!$.

Pour $k\in[\![0,n]\!]$, le nombre de permutations de $[\![1,n]\!]$

qui ont exactement k points fixes est :

$$\binom{n}{k} \cdot D_{n-k}$$

En effet on choisit les k éléments de $[\![1,n]\!]$ qui vont être fixes et il reste $n-k$ éléments à permuter sans point fixe.

Par disjonction de cas on a donc :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times D_{n-k} = n!$$

Avec le chgt de variable $k' = n-k$:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} \cdot D_k = n!$$

Puis par symétrie des coefficients binomiaux :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot D_k = n!$$

2.(c) $$n! \times \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!\,(n-k)!} (-1)^k \cdot (n-k)! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k (n-k)!$$

Mais d'après 2.(b) : $(n-k)! = \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n-k}{i} \cdot D_i$

Donc $$n! \times \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \cdot \left(\sum_{p=0}^{n-k} \binom{n-k}{p} D_p \right)$$

$$n! \times \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{p=0}^{n-k} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{n-k}{p} D_p \right)$$

$$\underset{\text{Fubini}}{=} \sum_{p=0}^{n} \left(\sum_{k=0}^{n-p} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{n-k}{p} . D_p \right)$$

$$= \sum_{p=0}^{n} D_p \times \left(\sum_{k=0}^{n-p} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{n-k}{p} \right)$$

Avec la question 1. :

$$n! \times \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} = \sum_{p=0}^{n} D_p \times 0^{n-p} = D_n \times 1 + \sum_{p=0}^{n-1} 0$$

$$= \underline{D_n}$$

<u>3.(a)</u> Une permutation qui n'a point de fixe ne peut pas envoyer $n+1$ sur lui-même, donc l'envoie sur un entier $k \in [\![1, n]\!]$.

Fixons cet entier k dans $[\![1, n]\!]$.

<u>Cas 1</u> l'image de k est $n+1$, ie que k et $n+1$ sont échangés. Il reste à permuter les $n-1$ autres éléments de $[\![1, n+1]\!]$ sans avoir de points fixes ce qui donne D_{n-1} possibilités.

<u>Cas 2</u> l'image de k n'est pas $n+1$. Dans ce cas c'est un élément $i \in [\![1, n]\!] \setminus \{k\}$ qui arrive en $n+1$.

Se donner une telle permutation revient à permuter sans point fixe $[\![1,n]\!]$. L'élément qui arrive en k est à la place envoyé en $n+1$ et on décide ensuite que c'est $n+1$ qui arrive en k. On retombe alors sur une permutation de $[\![1,n+1]\!]$ du type précédent. Il y a donc D_n permutations de cette sorte.

Au total, si k est fixé dans $[\![1,n]\!]$, il y a donc $D_n + D_{n-1}$ permutations sans points fixes qui envoient $n+1$ sur k.

Finalement par disjonction de cas:

$$D_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} (D_n + D_{n-1}) = \underline{n.(D_n + D_{n-1})}.$$

<u>3.(b)</u> Pour $n \geqslant 2$ on note $H(n)$ le prédicat: "$D_n = n.D_{n-1} + (-1)^n$"

<u>Pour $n=2$</u> : $2.D_1 + (-1)^2 = 2D_1 + 1 = 2 \times 0 + 1 = 1 = D_2$

donc $H(2)$ est vrai.

<u>Hérédité</u> Soit $n \geqslant 2$ tq $H(n)$ est vrai.

Alors $D_{n+1} = n \times (D_n + D_{n-1})$

Mais d'après $H(n)$ on a $D_n = n.D_{n-1} + (-1)^n$

donc $n.D_{n-1} = D_n - (-1)^n = D_n + (-1)^{n+1}$

D'où : $D_{n+1} = n.D_n + D_n + (-1)^{n+1} = (n+1).D_n + (-1)^{n+1}$

donc $H(n+1)$ est vrai.

Par récurrence $H(n)$ est vrai pour tout entier $n \geqslant 2$.

3.(c) En divisant par $n!$ on a :

$$\forall n \geqslant 2 \quad \frac{D_n}{n!} - \frac{D_{n-1}}{(n-1)!} = \frac{(-1)^n}{n!}$$

et donc $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \left(\frac{D_k}{k!} - \frac{D_{k-1}}{(k-1)!} \right) = \sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$

Par télescopage : $\displaystyle\frac{D_n}{n!} - \frac{D_1}{1!} = \sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$

donc $\displaystyle D_n = n! \times \left(\sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} + \underbrace{\frac{D_1}{1!}}_{=0} \right)$

Mais $\displaystyle\frac{(-1)^0}{0!} + \frac{(-1)^1}{1!} = 1 - 1 = 0$

donc $\displaystyle D_n = n! \times \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$