Correction du DS4

EXERCICE

1.(a) Après mise au même dénominateur :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad 1 = (\beta - \alpha)x + \alpha + \beta$$

Par identification : $\begin{cases} 1 = \alpha + \beta \\ 0 = \beta - \alpha \end{cases} \iff \alpha = \beta = \dfrac{1}{2}$

donc $\boxed{\forall x \in]-1,1[, \quad \dfrac{1}{1-x^2} = \dfrac{1}{2} \cdot \left(\dfrac{1}{1+x} + \dfrac{1}{1-x} \right)}$

1.(b) Une primitive de $x \longmapsto \dfrac{1}{1-x^2}$ est donc

$$x \longmapsto \frac{1}{2}\ln(1+x) - \frac{1}{2}\ln(1-x) = \boxed{\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}$$

2.(a) La fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{\cos t}$ est continue sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

D'après le théorème fondamental de l'analyse :

$\boxed{F \text{ est définie et dérivable sur }]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\text{ et } F'(t) = \frac{1}{\cos t}}$

2.(b) arcsin est de classe C^1 sur $]-1,1[$ donc sur $[0, \sin t]$.

x	θ
0	0
$\sin t$	t

$d\theta = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

donc $F(t) = \displaystyle\int_0^{\sin t} \frac{dx}{\cos(\arcsin x) \times \sqrt{1-x^2}}$

Mais comme $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

on a $\cos(\arcsin x) = \pm\sqrt{1-x^2}$.

Mais $\arcsin x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ donc $\cos(\arcsin x) > 0$

donc $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$.

Ainsi $F(t) = \displaystyle\int_0^{\sin t} \frac{dx}{1-x^2} \underset{1.(b)}{=} \left[\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right]_0^{\sin t}$

$$\boxed{F(t) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sin t}{1-\sin t}\right) = \ln\left(\sqrt{\frac{1+\sin t}{1-\sin t}}\right)}$$

On a donc montré que sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ une primitive de $t \mapsto \frac{1}{\cos t}$ est $t \mapsto \ln\left(\sqrt{\frac{1+\sin t}{1-\sin t}}\right)$.

3. Pour l'équation homogène $y' + \tan(t)y = 0$

on trouve $t \mapsto Ce^{+\ln(\cos t)} = C\cos(t)$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

On cherche une solution particulière par variation de la constante :

$y(t) = C(t) \times \cos(t)$ où C dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

On injecte dans l'équation :

$\forall t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \quad C'(t) \times \cos(t) + 0 = 1$

donc $C'(t) = \frac{1}{\cos t}$

D'après 2.(b) on peut choisir $C(t) = F(t)$.

et donc $y(t) = \dfrac{F(t)}{\cos t}$

Donc les solutions sont les fonctions :

$$y : t \longmapsto \frac{C + F(t)}{\cos t} \quad \text{où } C \in \mathbb{R}.$$

Avec la condition initiale : $y(0) = 0 = \dfrac{C + 0}{1}$

$$C = 0$$

Donc $\boxed{\begin{array}{rcl} y : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \dfrac{1}{\cos t} \times \ln\left(\sqrt{\dfrac{1+\sin t}{1-\sin t}}\right) \end{array}}$

PROBLEME

Partie I

1. arccos est définie sur $[-1,1]$, dérivable sur $]-1,1[$ et :

$$\forall t \in]-1,1[, \quad \arccos'(t) = \frac{-1}{\sqrt{1-t^2}}$$

2. $t \in \mathcal{D}_f \iff t \neq -1$ et $\dfrac{1-t}{1+t} \in [-1,1]$

Or $\dfrac{1-t}{1+t} \leqslant 1 \iff \dfrac{1-t}{1+t} - 1 \leqslant 0 \iff \dfrac{-2t}{1+t} \leqslant 0$

t	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$-2t$		$+$		$+$	0	$-$	
$1+t$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{-2t}{1+t}$		$-$	||	$+$	0	$-$	

$\iff t < -1$ ou $t \geqslant 0$

et $\dfrac{1-t}{1+t} \geqslant -1 \iff \dfrac{1-t}{1+t} + 1 \geqslant 0 \iff \dfrac{2}{1+t} \geqslant 0 \iff t > -1$

Donc $\boxed{\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^+}$

3.(a) $t \longmapsto \dfrac{1-t}{1+t}$ est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ donc sur $\mathbb{R}_+^*$.

Dans ce cas elle est à valeurs dans $]-1,1[$.

Comme arccos est dérivable sur $]-1,1[$ on en déduit que

$\boxed{f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}_+^*}$ comme composée de fonctions

dérivables.

De plus $\forall t \geq 0$, $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1-t}{1+t}\right) = \dfrac{-(1+t)-(1-t)}{(1+t)^2} = \dfrac{-2}{(1+t)^2}$

donc $\forall t \geq 0$, $f'(t) = -\dfrac{-\frac{2}{(1+t)^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{1-t}{1+t}\right)^2}} = \dfrac{2}{(1+t)^2\sqrt{\frac{4t}{(1+t)^2}}} = \boxed{\dfrac{1}{\sqrt{t}\,(t+1)}}$

car $t+1 \geq 0$

3.(b) $t \mapsto \sqrt{t}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Donc $t \overset{\varphi}{\longmapsto} \arctan(\sqrt{t})$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

De plus $\forall t > 0$, $\varphi'(t) = \dfrac{\frac{1}{2\sqrt{t}}}{1+(\sqrt{t})^2} = \boxed{\dfrac{1}{2\sqrt{t}\,(1+t)}}$

3.(c) On a donc $\forall t > 0$, $f'(t) = 2\varphi'(t)$.

La fonction $f - 2\varphi$ est donc constante sur $]0,+\infty[$.

Or $f(1) - 2.\varphi(1) = \arccos(0) - 2\arctan 1 = \frac{\pi}{2} - 2.\frac{\pi}{4} = 0$

Donc $\forall t > 0$, $f(t) = 2\varphi(t)$.

Mais $f(0) = \arccos(1) = 0$ et $2\varphi(0) = 2 \times 0 = 0$

Donc $\boxed{\forall t \geq 0,\ f(t) = 2.\arctan(\sqrt{t})}$

Partie II

4. Une primitive de $t \mapsto \frac{t^2}{1+t^2}$ est donc $t \mapsto t - \arctan(t)$

5. On pose $s = x^2 = \varphi(x)$

s	x
1	1
t	$\sqrt{t}$

φ est C^1 sur $[1, \sqrt{t}]$

$ds = 2x\,dx$

$$G(t) = \int_1^{\sqrt{t}} \frac{\sqrt{x^2}}{1+x^2} 2x\,dx \underset{x \geq 0}{=} 2\int_1^{\sqrt{t}} \frac{x^2}{1+x^2} dx = 2\left[x - \arctan x\right]_1^{\sqrt{t}}$$

$$G(t) = 2\left(\sqrt{t} - \arctan\sqrt{t} - 1 + \frac{\pi}{4}\right)$$

6. On a : $G(t) = \displaystyle\int_1^t 2s \times \frac{\frac{1}{2\sqrt{s}}}{1+(\sqrt{s})^2} ds$

On pose $\begin{cases} u'(s) = \dfrac{1}{2\sqrt{s}(1+s^2)} \\ v(s) = 2s \end{cases}$ ie $\begin{cases} u(s) = \arctan\sqrt{s} \\ v'(s) = 2 \end{cases}$

u, v sont C^1 sur $[1, t]$.

Alors par IPP : $G(t) = \left[2s.\arctan(\sqrt{s})\right]_1^t - 2.\displaystyle\int_1^t \arctan(\sqrt{s})ds$

$$= 2t.\arctan(\sqrt{t}) - \frac{\pi}{2} - 2.\int_1^t \arctan(\sqrt{s})ds$$

On a donc $\forall t > 0$, $\displaystyle\int_1^t \arctan(\sqrt{s})ds = (t+1)\arctan(\sqrt{t}) - \sqrt{t} - \frac{\pi}{2} + 1$

or $t \xrightarrow{f} 2\arctan(\sqrt{t})$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ donc d'après le théorème fondamental de l'analyse, la fonction $F : t \longmapsto \int_1^t 2\arctan(\sqrt{s})\,ds$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}_+^*$.

Une primitive de f sur $\mathbb{R}_+^*$ est donc :

$$\boxed{t \longmapsto 2(t+1).\arctan(\sqrt{t}) - 2\sqrt{t}}$$

Partie III

7. On trouve $t \longmapsto Ce^{\frac{1}{2}\ln|t|} = C\sqrt{t}$ sur $\mathbb{R}_+^*$

8. Par variation de la constante : $y(t) = C(t).\sqrt{t}$ où C dérivable.

$\forall t > 0$, $C'(t).\sqrt{t} + 0 = \frac{1}{1+t}$ donc $C'(t) = \frac{1}{\sqrt{t}(1+t)} = f'(t)$

On peut choisir $C(t) = f(t)$ donc $y(t) = \sqrt{t}.f(t)$

Les solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ sont donc les fonctions :

$$t \longmapsto C\sqrt{t} + f(t).\sqrt{t} = C\sqrt{t} + 2\sqrt{t}.\arctan(\sqrt{t})$$

où $C \in \mathbb{R}$