PCSI 1 - DEVOIR MAISON N ° 15 **Année scolaire 2018-2019**
A rendre le 08/04/19

EXERCICE 1 : Un exemple non trivial d'évènements indépendants

Dans l'expérience suivante, on dispose de trois dés à 6 faces, deux d'entre eux étant normaux et le troisième étant pipé. Un dé est normal si chaque face a même probabilité d'apparaître, alors qu'un dé est pipé si la face 6 est trois fois plus probable que les autres.

1. On choisit au hasard un dé et on le lance. Pour $i \in [\![1,6]\!]$, quelle est la probabilité que la face i apparaisse ? Sachant que le dé a donné un 6, quelle est la probabilité qu'il soit pipé ?
2. On choisit maintenant deux dés parmi les trois disponibles et on les lance. On note $A =$ « le dé pipé fait partie des deux dés choisis ».
   (a) Calculer $\mathbb{P}(A)$. Quelle est la probabilité de A sachant que la somme des résultats des dés vaut 12 ?
   (b) Même question avec une somme égale à 7.
   (c) Soit $B =$ « la somme de résultats des deux dés lancés vaut 7 ». Montrer que A et B sont indépendants.

EXERCICE 2 : Une chaîne de Markov [1]

Une société de location de voitures possède trois agences, une à Rennes, une à Lyon, une à Marseille.

Lorsqu'un client loue une voiture, un jour donné, dans une des trois villes, il la restitue le jour même dans une des trois agences.

On suppose qu'une voiture donnée n'est louée qu'une seule fois dans la journée.

Une étude statistique a permis de montrer que, pour une voiture donnée :

- si elle est louée à Rennes un certain jour, alors elle est laissée le soir à Lyon avec la probabilité 1/4, tandis qu'elle est laissée à Marseille avec la probabilité 3/4 ;
- si elle est louée à Lyon, alors elle est laissée à Rennes avec la probabilité 1/2, laissée à Marseille avec la probabilité 1/4, et ramenée à Lyon avec la probabilité 1/4 ;
- si elle est louée à Marseille, elle est laissée à Rennes avec la probabilité 1/2, laissée à Lyon avec la probabilité 1/4, et ramenée à Marseille avec la probabilité 1/4.

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on note R_n (respectivement L_n, M_n) l'événement « la voiture se trouve à Rennes (respectivement Lyon, Marseille) le soir du n-ième jour ».

On considère les probabilités suivantes : $r_n = \mathbb{P}(R_n)$, $\ell_n = \mathbb{P}(L_n)$ et $m_n = \mathbb{P}(M_n)$.

On suppose qu'au départ, la voiture est à Rennes, et on pose donc : $r_0 = 1$, $\ell_0 = 0$ et $m_0 = 0$.

On désigne par I la matrice identité d'ordre 3, définie par : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Andreï Andreïevitch Markov (1856-1922)

1. Pour tout entier n de $\mathbb{N}$, on définit la matrice colonne à trois lignes U_n par : $U_n = \begin{pmatrix} r_n \\ \ell_n \\ m_n \end{pmatrix}$.

   (a) Vérifier que, pour tout n de $\mathbb{N}$, on a la relation $U_{n+1} = AU_n$, où A est la matrice carrée d'ordre 3 suivante :
   $$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

   (b) Expliciter U_0. Etablir que, pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $U_n = A^n U_0$.

2. On se propose dans cette question de calculer A^n.

   On considère la matrice S,carrée d'ordre 3, définie par : $S = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

   (a) Montrer que la matrice S est inversible et calculer explicitement sa matrice inverse S^{-1}.

   (b) On pose $\Delta = S^{-1}AS$. Expliciter la matrice Δ.

   (c) Donner, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, l'expression de la matrice Δ^n.

   (d) Exprimer A en fonction de S, S^{-1} et Δ. En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a $A^n = S\Delta^n S^{-1}$.

   (e) Donner, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, l'expression de A^n.

3. (a) Exprimer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, r_n, ℓ_n, m_n en fonction de n.

   (b) Déterminer les limites de ces probabilités quand n tend vers $+\infty$.

<u>EXERCICE 3</u> : Algèbre linéaire et suites récurrentes linéaires

On note $\mathbb{E}$ l'ensemble des $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = u_{n+2} + u_{n+1} + 2u_n$, $\mathbb{F}$ l'ensemble des $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que : $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = 2a_n$ et $\mathbb{G}$ l'ensemble des $(b_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad b_{n+2} = -b_{n+1} - b_n$.

1. Vérifier que $\mathbb{E}$, $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$ sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.
2. Déterminer une base et la dimension de $\mathbb{F}$ et de $\mathbb{G}$.
3. On admet que $\dim(\mathbb{E}) = 3$. En déduire que : $\mathbb{E} = \mathbb{F} \oplus \mathbb{G}$. Donner alors une base de $\mathbb{E}$.
4. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 0$, $u_2 = 2$ et :
   $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = u_{n+2} + u_{n+1} + 2u_n$.
   Déterminer l'expression de u_n en fonction de n.
5. **Question facultative.** Sans admettre que $\dim(\mathbb{E}) = 3$, redémontrer que $\mathbb{E} = \mathbb{F} \oplus \mathbb{G}$ par analyse-synthèse.