PCSI1 - DEVOIR SURVEILLE N ° 8 **Année scolaire 2018-2019**
Samedi 4 mai 2019

Durée du devoir : 4h00

Les calculatrices ne sont pas autorisées.

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

EXERCICE 1 : Questions de cours

1. Donner l'énoncé du théorème de la valeur moyenne sur l'intervalle $[0, 1]$.
2. Énoncer le théorème qui permet d'étudier la régularité de la fonction $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ et de calculer sa dérivée.
3. Soient $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et f une application définie sur $\mathbb{E}$ à valeurs dans $\mathbb{F}$.
   (a) Donner la définition de « f est linéaire ».
   (b) Si f est linéaire, donner la définition de $\ker(f)$.
   (c) Si f est linéare, donner la défintion de $\mathrm{Im}(f)$.
   (d) Si f est linéaire, démontrer que : f est injective $\Longleftrightarrow \ker(f) = \{0\}$.

<u>EXERCICE 2</u> : La fonction Gamma d'Euler.

Les parties A et B sont indépendantes, mais utilisées dans la partie C.

PARTIE A.

Pour tout réel a positif ou nul, on note g_a la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $g_a(t) = t^a$.

A.1. Montrer que la fonction g_a est prolongeable par continuité en 0 (on notera toujours g_a la fonction ainsi prolongée, qui est donc définie et continue sur $\mathbb{R}^+$). Préciser la valeur de $g_a(0)$. Montrer que la fonction g_a est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$ pour $a \geq 1$.

Soient a et b deux réels positifs ou nuls. On pose :

$$I(a,b) = \int_0^1 g_a(t) g_b(1-t)\,\mathrm{d}t$$

A.2. Justifier l'existence de l'intégrale $I(a,b)$. À l'aide d'un changement de variable affine, comparer $I(a,b)$ et $I(b,a)$.

On écrira abusivement $I(a,b) = \displaystyle\int_0^1 t^a (1-t)^b\,\mathrm{d}t$.

A.3. Soient a et b deux réels positifs ou nuls. Vérifier que $I(a+1,b) = \dfrac{a+1}{b+1} I(a,b+1)$.

A.4. Calculer $I(a,0)$. En déduire que, pour tout entier naturel n, on a :

$$I(a,n) = \frac{n!}{(a+1)(a+2)\dots(a+n+1)}$$

A.5. Soient p et q deux entiers naturels. Exprimer $I(p,q)$ à l'aide de factorielles.

A.6. À l'aide du changement de variable $t = \sin^2(\theta)$, en déduire la valeur de l'intégrale :

$$J(p,q) = \int_0^{\pi/2} (\sin\theta)^{2p+1} (\cos\theta)^{2q+1}\,\mathrm{d}\theta$$

où p et q sont deux entiers naturels.

PARTIE B.

Pour tout réel a strictement positif, on note f_a la fonction définie par :

$$f_a(x) = x \ln\left(1 - \frac{a}{x}\right)$$

B.1. Préciser l'ensemble de définition de f_a.

On note $\mathcal{C}_a$ la courbe représentative de la restriction de la fonction f_a à l'intervalle $]a, +\infty[$.

B.2. Si a et x sont deux réels tels que $0 < a < x$, à l'aide du théorème des accroissements finis démontrer l'encadrement :

$$\frac{a}{x} \leq \ln(x) - \ln(x-a) \leq \frac{a}{x-a}$$

B.3. En déduire les variations de la fonction f_a sur l'intervalle $]a, +\infty[$ (on dressera un tableau de variations). Préciser les limites aux bornes de l'intervalle $]a, +\infty[$.

B.4. Donner l'allure de la courbe $\mathcal{C}_a$.

B.5. On fixe $a > 0$ et on considère la suite $y = (y_n)$ définie, pour tout entier naturel n tel que $n > a$, par $y_n = \left(1 - \frac{a}{n}\right)^n$.

Étudier le comportement (sens de variation, limite) de la suite (y_n).

PARTIE C.

Pour tout réel positif ou nul x, et tout entier naturel non nul n, on pose :

$$F_n(x) = \int_0^n \left(1 - \frac{u}{n}\right)^n u^x \,\mathrm{d}u$$

C.1. À l'aide d'un changement de variable affine, montrer que $F_n(x) = n^{x+1} I(x, n)$.

C.2. En utilisant les résultats de la partie B, montrer que, pour tout x fixé, la suite $\big(F_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

C.3. On fixe $x \geq 0$.

(a) En utilisant la définition d'une limite, montrer l'existence d'un réel $U > 0$ tel que :

$$\forall u \in \mathbb{R}^+, \qquad u \geq U \Longrightarrow \mathrm{e}^{-u} \leq \frac{1}{u^{x+2}}$$

(b) En déduire que, pour tout entier naturel non nul $n \geq U$, on a :

$$F_n(x) \leq \int_0^U \mathrm{e}^{-u} u^x \,\mathrm{d}u + \frac{1}{U}$$

(c) Montrer que la suite $\big(F_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.

Pour tout réel positif ou nul x, on pose $F(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} F_n(x)$.

C.4. Démontrer la relation fonctionnelle :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \qquad F(x+1) = (x+1)F(x)$$

En déduire la valeur de $F(k)$ pour k entier naturel.

<u>EXERCICE 3</u> : Un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$

Dans tout cet exercice, n désigne un entier naturel non nul, a et b sont deux nombres réels.
La notation $\mathbb{R}_n[X]$ désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$ et ayant un degré inférieur ou égal à n.

Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose :

$$\varphi_n(P) = (X-a)(X-b)P' - n\left(X - \frac{a+b}{2}\right)P$$

PARTIE A. Étude de φ_1.

Dans toute cette partie, on suppose que $n = 1$. On pose donc :

$$\forall P \in \mathbb{R}_1[X], \qquad \varphi_1(P) = (X-a)(X-b)P' - \left(X - \frac{a+b}{2}\right)P$$

1. Démontrer que φ_1 est un endomorphisme de $\mathbb{R}_1[X]$.

2. Vérifier que $\ker(\varphi_1) = \{0_{\mathbb{R}[X]}\}$ si $a \neq b$ et que $\ker(\varphi_1) = \text{Vect}(X-a)$ si $a = b$.

3. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que φ_1 soit bijective.

4. On suppose, dans cette question seulement, que $a \neq b$.

(a) Démontrer que la famille $\mathcal{B} = (X-a, X-b)$ est une base de $\mathbb{R}_1[X]$.

(b) Calculer $\varphi_1(X-a)$ et $\varphi_1(X-b)$. En déduire $\varphi_1^q(X-a)$ et $\varphi_1^q(X-b)$ pour tout $q \in \mathbb{N}$.

(c) En déduire que pour tout entier naturel q et tout polynôme $P = \lambda X + \mu \in \mathbb{R}_1[X]$, une expression de $\varphi_1^q(P)$ en fonction de q, λ et μ.

5. On s'intéresse dans cette question à l'ensemble :

$$\Gamma = \{\alpha \text{id} + \beta\varphi_1 + \gamma\varphi_1^2 + \delta\varphi_1^3;\ (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4\}$$

(a) Démontrer que Γ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(\mathbb{R}_1[X])$.

(b) En calculant $\varphi_1^2(1)$ et $\varphi_1^2(X)$ montrer que $\varphi_1^2 = \dfrac{(a-b)^2}{4}\text{id}$. En déduire que les endomorphismes φ_1^2 et φ_1^3 sont des combinaisons linéaires de φ_1 et id.

(c) Déterminer une base de Γ.

6. On suppose dans cette question que $a = 4$ et $b = 2$.
Montrer que l'application φ_1 est une symétrie dont on précisera le support et la direction (on donnera une base des deux sous-espaces vectoriels concernés).

PARTIE B. Quelques généralités sur φ_n.

7. Démontrer que φ_n est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

8. On se propose dans cette question de déterminer $\ker(\varphi_n)$.
On pose $\alpha = \max(a, b)$ et on considère l'intervalle $]\alpha, +\infty[$.

(a) Démontrer que la fonction $x \longmapsto \dfrac{2x - (a+b)}{x^2 - (a+b)x + ab}$ est continue sur I.

(b) Déterminer une primitive F de la fonction f sur I.

(c) En déduire que les solutions sur l'intervalle I l'équation différentielle (E) :

$$y' - \frac{nx - n\dfrac{a+b}{2}}{(x-a)(x-b)}y = 0$$

sont les fonctions de la forme $x \longmapsto C(x-a)^{n/2}(x-b)^{n/2}$ où $C \in \mathbb{R}$.

(d) On suppose que n est pair et on ecrit $n = 2p$ avec $p \in \mathbb{N}^*$. Déduire de la question 8.(c) une base de l'espace vectoriel $\ker(\varphi_{2p})$.

(e) On suppose maintenant que n est impair et on écrit $n = 2p+1$ avec $p \in \mathbb{N}$. Déduire de la question 8.(c) une base de l'espace vectoriel $\ker(\varphi_{2p+1})$. (On pourra discuter suivant les valeurs de a et b.)