Durée du devoir : 4h00

Les calculatrices sont autorisées.

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

<u>EXERCICE 1</u> : Déterminants de Gram.

Soit $\mathbb{E}$ un espace euclidien. Pour $(u_1, \ldots, u_p)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{E}$ on note $G(u_1, \ldots, u_p)$ la matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ dont le coefficient d'indice (i, j) est $\langle u_i, u_j \rangle$.

1. Calculer $\det\big(G(u_1)\big)$ et $\det\big(G(u_1, u_2)\big)$.
2. Montrer que $(u_1, \ldots, u_p)$ est liée si, et seulement si, $\det\big(G(u_1, \ldots, u_p)\big) = 0$.
   Indication. Montrer qu'une relation entre les vecteurs $(u_1, \ldots, u_p)$ se traduit en une relation entre les colonnes de la matrice $G(u_1, \ldots, u_p)$, et réciproquement.
3. Dans cette question $\mathbb{F}$ est un sev de $\mathbb{E}$, $(e_1, \ldots, e_p)$ est une base de $\mathbb{F}$, et x un vecteur quelconque de $\mathbb{E}$. On note $p_{\mathbb{F}}(x)$ (respectivement $p_{\mathbb{F}^\perp}(x)$) le projeté orthogonal de x sur $\mathbb{F}$ (respectivement sur $\mathbb{F}^\perp$).
   (a) Montrer que :
   $$\det\big(G(e_1, \ldots, e_p, x)\big) = \det\Big(G\big(e_1, \ldots, e_p, p_{\mathbb{F}}(x)\big)\Big) + \big\|p_{\mathbb{F}^\perp}(x)\big\|^2 \times \det\big(G(e_1, \ldots, e_p)\big)$$
   (b) À l'aide du théorème de meilleure approximation, en déduire que :
   $$d(x, \mathbb{F}) = \sqrt{\frac{\det\big(G(e_1, \ldots, e_p, x)\big)}{\det\big(G(e_1, \ldots, e_p)\big)}}$$
4. On se donne $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_k)$ une base orthonormée de $\mathbb{F} = \mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_p)$ et on pose $M = \mathrm{Mat}(u_1, \ldots, u_p; \mathcal{B}) \in \mathcal{M}_{k,p}(\mathbb{R})$. Pour simplifier on notera G la matrice $G(u_1, \ldots, u_p)$.
   (a) Montrer que $G = {}^tMM$, où ${}^tM$ désigne la transposée de M.
   (b) En déduire que $\det(G) \geq 0$ et retrouver le résultat de la question 2.
   (c) Montrer que les matrices G et M ont même noyau, puis que la famille de vecteurs $(u_1, \ldots, u_p)$ a même rang que la matrice G.
   Indication. Pour montrer que $\ker(G) \subseteq \ker(M)$ on remarquera que si $Y \in \mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{R})$ alors ${}^tYY = 0 \Longleftrightarrow Y = 0_{k,1}$.

<u>EXERCICE 2</u> : Calcul de la somme de la série $\sum \frac{1}{n^2}$.

1. En intégrant deux fois par parties vérifier que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \int_0^{\pi} \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \cos(nt)\, \mathrm{d}t = \frac{1}{n^2}$$

2. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Vérifier que : $\forall t \in]0,\pi]$, $\dfrac{1-\mathrm{e}^{imt}}{1-\mathrm{e}^{it}}\mathrm{e}^{it} = \dfrac{\sin\left(\frac{mt}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\mathrm{e}^{i\frac{m+1}{2}t}$.

   En déduire que : $\forall t \in]0,\pi]$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{m} \cos(nt) = \frac{\cos\left(\frac{m+1}{2}t\right)\sin\left(\frac{m}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$.

3. (a) Soit l'application $f : [0,\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \dfrac{\frac{t^2}{2\pi} - t}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$ si $0 < t \leqslant \pi$, et $f(0) = -1$. Montrer soigneusement que f est de classe C^1 sur $[0,\pi]$.

   (b) Montrer que si $m \in \mathbb{N}^*$: $\displaystyle\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} + \int_0^{\pi} f(t)\sin\left(\frac{2m+1}{2}t\right) \mathrm{d}t$

   (c) En déduire que la série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge et que : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

<u>EXERCICE 3</u> : Etude d'une variable aléatoire.

On effectue une succession de lancers indépendants d'une pièce donnant « Pile » avec la probabilité $p \in]0,1[$ et « Face » avec la probabilité $q = 1-p$.

n est un entier naturel non nul et Ω_n désigne l'ensemble des successions de n fois « Pile » ou « Face ».

Pour $i \in \mathbb{N}^*$, on note P_i l'événement « le i-ième lancer amène Pile » et F_i l'événement contraire.

On appelle *série* une succession de lancers qui amènent tous le même côté de la pièce.

On note N_n le nombre de séries observées lors des n lancers.

Par exemple, si les 11 premiers lancers successifs donnent : FFPPPPFFPPP (F désignant « Face » et P « Pile »), on a pour une telle succession $\omega \in \Omega$,

$$\begin{aligned} &N_1(\omega) = N_2(\omega) = 1; \quad N_3(\omega) = \cdots = N_6(\omega) = 2; \\ &N_7(\omega) = N_8(\omega) = 3; \quad N_9(\omega) = \cdots = N_{11}(\omega) = 4; \end{aligned}$$

les données précédentes ne permettant pas de déterminer $N_{12}(\omega)$.

On admettra que N_n est une variable aléatoire sur Ω_n.

1. Déterminer rapidement les lois de N_1, N_2 et N_3 et donner leurs espérances et variances.
2. Dans le cas général où $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer $N_n(\Omega)$ puis calculer les valeurs de $\mathbb{P}(N_n = 1)$ et $\mathbb{P}(N_n = n)$.
3. **Simulation informatique**.

   On suppose dans cette question que la pièce est équilibrée, c'est-à-dire que $p = \dfrac{1}{2}$.

   Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note X_k la variable aléatoire qui vaut 1 lorsque le k-ième lancer amène Pile et 0 sinon.

   On admettra qu'en langage Python, l'instruction `x=int( rand()<0.5 )` simule une variable aléatoire `x` de loi uniforme sur $\{0,1\}$ (soit une loi de Bernoulli de paramètre $1/2$).

Compléter le programme informatique suivant pour que, m étant une valeur entière, inférieure à 100, entrée par l'utilisateur, il simule les m variables aléatoires X_1, X_2, ..., X_m (dont les valeurs seront placées dans la liste X) et détermine les valeurs de N_1, N_2, ..., N_m (qui seront stockées dans la liste N).

```
m = int(input('Valeur de m ? '))
X = [ ]
for i in range(0,m):
      X.append(0)
N = [ ]
for i in range(0,m):
      N.append(0)
X[0] = ...
N[0] = ...
for i in range(1,m):
      X[i] = int( rand()<0.5 )
      ...
      ...
      ...
      ...
print(X)
print(N)
```

4. **Fonction génératrice de** N_n.

   On suppose dans les questions suivantes que la pièce est équilibrée, c'est-à-dire que $p = \frac{1}{2}$.

   On pose, pour n dans $\mathbb{N}^*$ et pour s dans $[0, 1]$,

$$G_n(s) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(N_n = k)s^k$$

   (a) Pour $s \in [0, 1]$, comparer l'espérance de la variable aléatoire s^{N_n} avec $G_n(s)$.

   (b) Que représente $G_n'(1)$?

   (c) Montrer que pour tout $n \geq 2$ et tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a :

$$\mathbb{P}\big((N_n = k) \cap P_n\big) = \frac{1}{2}\mathbb{P}\big((N_{n-1} = k) \cap P_{n-1}\big) + \frac{1}{2}\mathbb{P}\big((N_{n-1} = k-1) \cap F_{n-1}\big)$$

   On admettra qu'on a aussi :

$$\mathbb{P}\big((N_n = k) \cap F_n\big) = \frac{1}{2}\mathbb{P}\big((N_{n-1} = k) \cap F_{n-1}\big) + \frac{1}{2}\mathbb{P}\big((N_{n-1} = k-1) \cap P_{n-1}\big)$$

   Montrer alors que

$$\mathbb{P}(N_n = k) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(N_{n-1} = k) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(N_{n-1} = k-1)$$

   (d) Soient $n \geq 2$ et $s \in [0, 1]$. Montrer que $G_n(s) = \frac{1+s}{2}G_{n-1}(s)$.

   Calculer $G_1(s)$ et en déduire que $G_n(s) = s\left(\frac{1+s}{2}\right)^{n-1}$.

   (e) Déterminer l'espérance de N_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

   (f) Déterminer la variance de N_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

   (g) Donner la loi de la variable aléatoire N_n. Reconnaître la loi de $N_n - 1$.

<u>EXERCICE 4 :</u> Équivalents de sommes partielles de séries divergentes

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de nombres réels. On dit que la suite (a_n) vérifie la propriété (P) si

- $a_1 \geq 1$,
- la suite (a_n) est bornée,
- $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n > 0$,
- la série $\sum(a_n)$ diverge.

On note alors : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $A_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ et $\forall n \geq 2$, $b_n = \dfrac{1}{\ln(A_n)} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{a_k}{A_k}$.

Dans tout l'exercice, on utilisera sans la démontrer la propriété suivante, notée (R) :

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles **<u>à termes strictement positifs</u>**.
Si $\begin{cases} (a) & u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \\ (b) & \text{la série } \sum(u_n) \text{ diverge} \end{cases}$ **alors** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=1}^{n} v_k$.

1. Pour tout n entier naturel supérieur ou égal à 1, on pose $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

   En utilisant les séries de terme général $u_n = \dfrac{1}{n}$ et $v_n = \ln(n+1) - \ln(n)$ et la propriété (R), prouver que : $H_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$

2. (a) De façon analogue, montrer que $T_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(\ln(n))$.

   (b) En déduire la nature de la série de terme général $w_n = \dfrac{1}{n\ln(n)}$ $(n \geq 2)$.

   (c) Montrer que $f : t \longmapsto \dfrac{1}{t\ln(t)}$ est décroissante sur $[2, +\infty[$.
   En déduire que :
   $$\forall n \geq 2, \quad \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)} \geq \int_2^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln(t)}$$
   Retrouver alors le résultat de la question 2.(b) sans utiliser la propriété (R).

3. **Étude de deux exemples.**

   (a) On prend dans cette question : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = 1$.
   Vérifier que la suite (a_n) vérifie la propriété (P) et déterminer la limite en $+\infty$ de b_n.

   (b) On prend dans cette question : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \dfrac{1}{n}$.
   Vérifier que la suite (a_n) vérifie la propriété (P).
   En utilisant la propriété (R) et la série $\sum \dfrac{1}{n\ln(n)}$, déterminer la limite en $+\infty$ de b_n.

4. **On revient au cas général** et on considère une suite (a_n) qui satisfait à la propriété (P).

   (a) Montrer que $A_n \underset{n\to+\infty}{\sim} A_{n-1}$.

   (b) Prouver que $\dfrac{a_n}{A_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln\left(\dfrac{A_n}{A_{n-1}}\right)$.

   (c) Déterminer alors la nature de la série $\sum \dfrac{a_n}{A_n}$.

   (d) A l'aide de la propriété (R) et des questions précédentes, déterminer alors la limite de b_n en $+\infty$.

5. Soit u_n le terme général d'une série à termes strictement positifs divergente.
   Montrer qu'il existe une suite (v_n) à termes positifs tels que $v_n \underset{n\to+\infty}{=} o(u_n)$ et la série $\sum v_n$ diverge.