PROBLEME

Partie I

1.(a) Pour $N \geq 2$, $P_N = \prod_{n=1}^{N} u_n = u_N \times \prod_{n=1}^{N-1} u_n = u_N \times P_{N-1}$ donc $\boxed{u_N = \frac{P_N}{P_{N-1}}}$.

Si $\prod_{n\geq 1} u_n$ converge alors $\lim_{N\to+\infty} P_N = \ell \neq 0$. On a aussi $\lim_{N\to+\infty} P_{N-1} = \ell$ et donc $\lim_{N\to+\infty} u_N = \frac{\ell}{\ell}$

Donc $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 1}$.

1.(b) Pour $N \geq 1$, $P_N = \left(1+\frac{1}{1}\right)\times\left(1+\frac{1}{2}\right)\times\dots\times\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{\cancel{2}}{1}\times\frac{\cancel{3}}{\cancel{2}}\times\frac{\cancel{4}}{\cancel{3}}\times\dots\times\frac{\cancel{N}}{\cancel{N-1}}\times\frac{N+1}{\cancel{N}} = \frac{N+1}{1} = \boxed{N+1}$.

On a $\lim_{N\to+\infty} P_N = +\infty$ donc $\prod_{n\geq 1}\left(1+\frac{1}{n}\right)$ est divergent.

1.(c) Sur l'exemple du 1.(b), $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$ et $\prod_{n\geq 1} u_n$ diverge.
La condition du 1.(a) est donc nécessaire mais pas suffisante.

2. Pour $n \geq 2$, $u_n = 1 - \frac{1}{n^2} = \frac{n^2-1}{n^2} = \frac{(n-1).(n+1)}{n^2} = \frac{\frac{n+1}{n}}{\frac{n}{n-1}}$. Donc $\forall N \geq 2$, $\boxed{P_N = \prod_{n=2}^{N} \frac{\frac{n+1}{n}}{\frac{n}{n-1}}}$

On a donc $P_N = \frac{\frac{\cancel{3}}{\cancel{2}}}{\frac{2}{1}} \times \frac{\frac{\cancel{4}}{\cancel{3}}}{\frac{\cancel{3}}{\cancel{2}}} \times \frac{\frac{5}{\cancel{4}}}{\frac{\cancel{4}}{\cancel{3}}} \times \dots \times \frac{\frac{\cancel{N}}{\cancel{N-1}}}{\frac{\cancel{N-1}}{\cancel{N-2}}} \times \frac{\frac{N+1}{N}}{\frac{\cancel{N}}{\cancel{N-1}}} = \frac{\frac{N+1}{N}}{\frac{2}{1}} = \frac{N+1}{2N} \xrightarrow[N\to+\infty]{} \frac{1}{2}$

Donc $\prod_{n\geq 2}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$ est convergent et $\boxed{\prod_{n=2}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2}}$.

3.(a) Pour $N \geq 1$, on note H_N : " $P_N \times \sin\left(\frac{a}{2^N}\right) = \frac{1}{2^N} \sin a$ "

Pour $N=1$: $P_1 . \sin\left(\frac{a}{2}\right) = \cos\left(\frac{a}{2}\right) \sin\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{1}{2}\sin a$ donc H_1 est vraie.

Soit $N \geq 1$ tq H_N vraie.
Alors $P_{N+1} . \sin\left(\frac{a}{2^{N+1}}\right) = P_N . \cos\left(\frac{a}{2^{N+1}}\right) . \sin\left(\frac{a}{2^{N+1}}\right) = P_N \times \frac{1}{2} \sin\left(\frac{a}{2^N}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^N} \sin a$ d'après H_N.
$= \frac{1}{2^{N+1}} . \sin a$ donc H_{N+1} est vraie.

Donc par récurrence : $\forall N \geq 1$, $\boxed{P_N . \sin\left(\frac{a}{2^N}\right) = \frac{1}{2^N} . \sin(a)}$.

On a donc $P_N = \frac{\frac{1}{2^N} . \sin a}{\sin\left(\frac{a}{2^N}\right)} \underset{N\to+\infty}{\sim} \frac{\frac{1}{2^N} \sin a}{\frac{a}{2^N}} = \frac{\sin a}{a}$ donc $\lim_{N\to+\infty} P_N = \frac{\sin a}{a}$.

Ainsi $\prod_{n\geq 1} \cos\left(\frac{a}{2^n}\right)$ converge et $\boxed{\prod_{n=1}^{+\infty} \cos\left(\frac{a}{2^n}\right) = \frac{\sin a}{a}}$.

3.(b) On sait que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos(2x) = 2.\cos^2 x - 1$

Donc $\forall n \geq 1$, $\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) - 1$ donc $\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) = \sqrt{\frac{1+\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)}{2}}$ car $\cos \frac{\pi}{2^{n+1}} > 0$ puisque $0 < \frac{\pi}{2^{n+1}} < \frac{\pi}{2}$

Si on prend $a = \frac{\pi}{2}$ dans la question précédente :

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\frac{\pi}{2}} = \prod_{n=1}^{+\infty} \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$$

donc $\frac{2}{\pi} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \times \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) \times \cos\left(\frac{\pi}{16}\right) \times \dots = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} \times \sqrt{\frac{1+\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}}{2}} \times \dots$

Après simplification $\boxed{\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \times \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} \times \dots}$

Partie II

4.(a) On a $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$ donc par déf $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geq n_0, |u_n - 1| \leq \varepsilon$
donc $u_n \geq 1 - \varepsilon$

Si on prend $\varepsilon = 1/2$ on a : $\exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geq n_0$, $u_n \geq 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} > 0$
donc $\underline{\forall n \geq n_0, u_n > 0}$

4.(b) On remarque que : $\forall N \geq n_0$, $S_N = \sum_{n=n_0}^{N} \ln u_n = \ln\Big(\underbrace{\prod_{n=n_0}^{N} u_n}_{= P_N}\Big) = \ln(P_N)$

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que $\prod_{n \geq n_0} u_n$ converge.

Par déf $\lim\limits_{N \to +\infty} P_N \stackrel{\text{existe}}{=} l \in \mathbb{R}^*$. Mais $\forall n \geq n_0$, $u_n > 0$ donc $\forall N \geq n_0$, $P_N > 0$
donc $l \geq 0$.

On a donc $l > 0$. Alors $S_N = \ln(P_N) \xrightarrow[N \to +\infty]{} \ln(l) \in \mathbb{R}$.

Donc par définition $\boxed{\sum_{n \geq n_0} u_n \text{ converge}}$ et $\boxed{\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n = \ln(l) = \ln\left(\prod_{n=n_0}^{+\infty} u_n\right)}$

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que $\sum_{n \geq n_0} \ln(u_n)$ converge.

Par déf, $\lim\limits_{N \to +\infty} S_N \stackrel{\text{existe}}{=} S \in \mathbb{R}$. Mais $\forall N \geq n_0$, $P_N = e^{S_N} \xrightarrow[N \to +\infty]{} e^S \neq 0$

Donc par définition, $\boxed{\prod_{n \geq n_0} u_n \text{ converge}}$ et $\boxed{\prod_{n=n_0}^{+\infty} u_n = \exp\left(\sum_{n=n_0}^{+\infty} \ln u_n\right)}$

5.(a) Il suffit d'étudier la fonction $f : x \longmapsto \ln(1+x) - x$ sur $\mathbb{R}^+$.

5.(b) On a $\forall n \geq 1$, $v_n \geq 0$ donc $\forall n \geq 1$, $0 \leq \ln(1+v_n) \leq v_n$.
Comme $\sum_{n\geq 1} v_n$ converge, on sait d'après les théorèmes de comparaison pour les séries à termes positifs que $\sum_{n\geq 1} \ln(1+v_n)$ converge aussi.
Mais on a $\lim_{n\to+\infty} 1+v_n = 1+0 = 1$ et $\forall n \geq 1$, $1+v_n \geq 1 > 0$ donc on peut utiliser la question 4 avec $u_n = 1+v_n$ et $n_0 = 1$: la convergence de $\sum_{n\geq 1} \ln(1+v_n)$ donne $\boxed{\text{la convergence de } \prod_{n\geq 1}(1+v_n)}$.

5.(c) De même la convergence de $\prod_{n\geq 1}(1+v_n)$ donne la convergence de $\sum_{n\geq 1} \ln(1+v_n)$.
Mais on a $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$ donc $\ln(1+v_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$. Les théorèmes de comparaison des séries à termes positifs, on sait que $\boxed{\sum_{n\geq 1} v_n \text{ est convergente}}$.

5.(d) On a vu à la question 1.(b) que $\prod_{n\geq 1}\left(1+\frac{1}{n}\right)$ est divergent. D'après 5.(b), par contraposée, $\boxed{\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} \text{ diverge}}$.

5.(e) On a encore $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ et $\forall n \geq 1$, $u_n > 0$ donc on peut appliquer la question 4. et on obtient $\prod_{n\geq 1}(1+v_n)$ converge si et seulement si $\sum_{n\geq 1} \ln(1+v_n)$ converge.
Mais $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$ donc $\ln(1+v_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ donc d'après les théorèmes de comparaison pour les séries à termes positifs (ou négatifs ici) : $\sum_{n\geq 1} \ln(1+v_n)$ converge si et seulement si $\sum_{n\geq 1} v_n$ converge.
Ainsi $\boxed{\prod_{n\geq 1}(1+v_n) \text{ converge} \iff \sum_{n\geq 1} v_n \text{ converge}}$.

Partie III

6.(a) Si $\alpha \geq 1$, $\lim_{n\to+\infty} \alpha^{2^n} = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha = 1 \\ +\infty & \text{si } \alpha > 1 \end{cases}$ donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = \begin{cases} 2 & \text{si } \alpha = 1 \\ +\infty & \text{si } \alpha > 1 \end{cases}$
Donc d'après la question 1., $\boxed{\prod_{n\geq 1} u_n \text{ diverge}}$.

6.(b) On a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $n^2 \alpha^{2^n} = e^{2 \ln n} \cdot e^{2^n \ln \alpha} = e^{2 \ln n + 2^n \ln \alpha}$

$$= \exp\left(2^n \times \left[\frac{2 \ln n}{2^n} + \ln \alpha\right]\right)$$

Mais d'après les croissances comparées, $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{2 \ln n}{2^n} + \ln \alpha = \ln \alpha < 0$ car $\alpha < 1$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 \alpha^{2^n} = 0$ ie $\boxed{\alpha^{2^n} \underset{n \to +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)}$

D'après les théorèmes de comparaison pour les séries à termes positifs : $\sum\limits_{n \geq 1} \alpha^{2^n}$ converge.

Si on pose : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = \alpha^{2^n}$ on a $v_n \geq 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$ donc on peut utiliser la question 5.(b) qui nous donne $\boxed{\prod\limits_{n \geq 1} (1 + \alpha^{2^n}) \text{ converge}}$.

6.(c) $(1 - \alpha^2) P_1 = (1 - \alpha^2) \times (1 + \alpha^2) = 1 - \alpha^4 = 1 - \alpha^{2^2}$

$(1 - \alpha^2) P_2 = (1 - \alpha^2) \times (1 + \alpha^2) \times (1 + \alpha^4) = (1 - \alpha^4)(1 + \alpha^4) = 1 - \alpha^8 = 1 - \alpha^{2^3}$

Et ainsi de suite : $\boxed{\forall N \geq 1,\ (1 - \alpha^2) P_N = 1 - \alpha^{2^{N+1}}}$ (par récurrence immédiate).

Or $\lim\limits_{N \to +\infty} 1 - \alpha^{2^{N+1}} = 1 - 0 = 0$ car $0 < \alpha < 1$. Ainsi $\lim\limits_{N \to +\infty} P_N = \frac{1}{1 - \alpha^2}$

Donc $\boxed{\prod\limits_{n=1}^{+\infty} (1 + \alpha^{2^n}) = \frac{1}{1 - \alpha^2}}$

7.(a) On distingue dans le produit les indices $n = 2p$ pairs et $n = 2p - 1$ impairs :

$$\prod_{n=1}^{2N} (1 - x^n) = \underbrace{\prod_{p=1}^{N} (1 - x^{2p-1})}_{\substack{\text{car } 1 \leq 2p-1 \leq 2N \\ \text{donc } 1 \leq p \leq N}} \times \underbrace{\prod_{p=1}^{N} (1 - x^{2p})}_{\substack{\text{car } 1 \leq 2p \leq 2N \\ \text{donc } 1 \leq p \leq N}}$$

Comme les variables n et p sont muettes :

$$\prod_{n=1}^{2N} (1 - x^n) = \prod_{n=1}^{N} (1 - x^{2n-1}) \times \prod_{n=1}^{N} (1 - x^{2n})$$

Mais d'après la relation de Chasles pour $\prod$:

$$\prod_{n=1}^{2N}(1-x^n)=\prod_{n=1}^{N}(1-x^n)\times\prod_{n=N+1}^{2N}(1-x^n)=\prod_{n=1}^{N}(1-x^{2n-1})\times\prod_{n=1}^{N}(1-x^{2n})$$

Donc : $\displaystyle\prod_{n=N+1}^{2N}(1-x^n)\times\frac{1}{\prod_{n=1}^{N}(1-x^{2n-1})}=\frac{\prod_{n=1}^{N}(1-x^{2n})}{\prod_{n=1}^{N}(1-x^n)}$

Mais $\displaystyle\frac{1}{\prod_{n=1}^{N}(1-x^{2n-1})}=\prod_{n=1}^{N}\frac{1}{1-x^{2n-1}}$

Et $\displaystyle\prod_{n=1}^{N}(1-x^{2n})=\prod_{n=1}^{N}(1-x^n)(1+x^n)=\prod_{n=1}^{N}(1-x^n)\times\prod_{n=1}^{N}(1+x^n)$

En injectant dans la formule précédente :

$$\boxed{\prod_{n=N+1}^{2N}(1-x^n)\times\prod_{n=1}^{N}\frac{1}{1-x^{2n-1}}=\prod_{n=1}^{N}(1+x^n)}$$

7.(b) Comme $-1<x<1$ les séries $\sum_{n\geq 1}x^n$ et $\sum_{n\geq 1}(-x^n)$ sont convergentes.

Les questions 5.(b) et 5.(e) avec $v_n=x^n$ et $v_n=-x^n$ donnent la convergence de $\prod_{n\geq 1}(1+x^n)$ et $\prod_{n\geq 1}(1-x^n)$.

On a donc $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\prod_{n=1}^{N}(1+x^n)=\prod_{n=1}^{+\infty}(1+x^n)$

et $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\prod_{n=N+1}^{2N}(1-x^n)=\lim_{N\to+\infty}\frac{\prod_{n=1}^{2N}(1-x^n)}{\prod_{n=1}^{N}(1-x^n)}=\frac{\prod_{n=1}^{+\infty}(1-x^n)}{\prod_{n=1}^{+\infty}(1-x^n)}=1$

On en déduit que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\prod_{n=1}^{N}\frac{1}{1-x^{2n-1}}=\prod_{n=1}^{+\infty}(1+x^n)$

En conclusion les produits $\prod_{n\geq 1}(1+x^n)$ et $\prod_{n\geq 1}\frac{1}{1-x^{2n-1}}$ convergent et :

$$\prod_{n=1}^{+\infty}(1+x^n)=\prod_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{1-x^{2n-1}}$$

8.(a) Puisque la série $\sum_{n\geq 1} \frac{-1}{4n^2}$ converge (série de Riemann), la question 5.(e) donne immédiatement la $\underline{\text{convergence de } \prod_{n\geq 1}\left(1-\frac{1}{4n^2}\right)}$.

Pour $N \geq 1$:

$$\prod_{n=1}^{N}\left(1-\frac{1}{4n^2}\right) = \prod_{n=1}^{N}\frac{4n^2-1}{4n^2} = \prod_{n=1}^{N}\frac{(2n-1)\times(2n+1)}{2n\times 2n} = \frac{\prod_{n=1}^{N}(2n-1)\times\prod_{n=1}^{N}(2n+1)}{\prod_{n=1}^{N}(2n)\times\prod_{n=1}^{N}(2n)}$$

et $\prod_{n=1}^{N}(2n) = 2^N \times \prod_{n=1}^{N} = 2^N \times N!$

$$\prod_{n=1}^{N}(2n-1) = 1\times 3\times 5\times\ldots\times(2N-3)\times(2N-1) = \frac{(2N)!}{2\times 4\times\ldots\times(2N-2)\times(2N)}$$

$$= \frac{(2N)!}{2^N\times 1\times 2\times\ldots\times(N-1)\times N} = \frac{(2N)!}{2^N \times N!}$$

et $\prod_{n=1}^{N}(2n+1) = 3\times 5\times\ldots\times(2N+1) = \frac{(2N+1)!}{2^N\times N!}$

Finalement : $\prod_{n=1}^{N}\left(1-\frac{1}{4n^2}\right) = \boxed{\frac{(2N)!\times(2N+1)!}{(N!)^4\times 2^{4N}}}$. On aurait pu aussi procéder par récurrence

8.(c) Par substitution : $(2N)! \underset{N\to+\infty}{\sim} \sqrt{4\pi N}\times(2N)^{2N}\times e^{-2N}$

$$(2N+1)! = (2N+1)\times(2N)! \underset{N\to+\infty}{\sim} 2N\times(2N)!$$

$$\underset{N\to+\infty}{\sim} \sqrt{4\pi N}\times(2N)^{2N+1}\times e^{-2N}$$

Donc par opérations sur les équivalents : $\prod_{n=1}^{N}\left(1-\frac{1}{4n^2}\right) \underset{N\to+\infty}{\sim} \frac{4\pi N\times 2^{4N+1}\times N^{4N+1}\times e^{-4N}}{4\pi^2 N^2\times N^{4N}\times e^{-4N}\times 2^{4N}}$

et après simplifications : $\prod_{n=1}^{N}\left(1-\frac{1}{4n^2}\right) \underset{N\to+\infty}{\sim} \frac{2}{\pi}$

Donc $\boxed{\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{4n^2}\right) = \frac{2}{\pi}}$