Correction DM5 Partie 1

1. $t \mapsto at$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (fonction affine) et à valeurs dans $\mathbb{R}$

exp est dérivable sur $\mathbb{R}$

Par composée : y est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\forall t \in \mathbb{R}, \ y'(t) = Cae^{at}$

donc $\forall t \in \mathbb{R}, \ y'(t) - ay(t) = Cae^{at} - aCe^{at} = \boxed{0}$

2. z est dérivable sur $\mathbb{R}$ car c'est un produit de fonctions qui le sont.

$\forall t \in \mathbb{R}, \ z'(t) = y'(t)e^{-at} - ay(t)e^{-at}$

$$= (y'(t) - ay(t))e^{-at} = 0$$

Donc z est constante sur l'intervalle $\mathbb{R}$.

3. Il existe donc un réel C tel que $\forall t \in \mathbb{R}, z(t) = C$.

Donc $\forall t \in \mathbb{R}, y(t) = Ce^{at}$

Partie 2

1.(a) On applique (R) avec $s = t = 0$:

$$g(0) = 2g(0) \text{ donc } \boxed{g(0) = 0}$$

1.(b) On fixe $t \in \mathbb{R}$.

Pour $n \in \mathbb{N}$ on note P_n le prédicat :

$$\text{" } g(nt) = ng(t) \text{ "}$$

P_0 est vrai car $g(0) = 0$

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé tq P_n est vrai.

On a $(n+1)t = nt + t$

On utilise (R) avec les réels nt et t :

$$g(nt + t) = g(nt) + g(t) \underset{P_n}{=} n \times g(t) + g(t)$$

Donc $g((n+1)t) = (n+1) \times g(t)$. Donc P_{n+1} est vrai.

ccl $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ g(nt) = n \times g(t)}$

1.(c) Soit $t \in \mathbb{R}$. On utilise (R) avec les réels t et $-t$:

$$g(0) = g(t) + g(-t)$$

Comme $g(0)=0$ on a $g(-t)+g(t)=0$

donc $g(-t)=-g(t)$.

Ceci prouve que <u>g est impaire sur $\mathbb{R}$.</u>

Soit $(n,t)\in(\mathbb{Z}\setminus\mathbb{N})\times\mathbb{R}$.

Comme $n<0$ on a $n=-|n|$.

$|n|\in\mathbb{N}$ donc d'après la question précédente :

$$g(|n|\times t)=|n|\times g(t) \quad \text{ie} \quad g(-nt)=-n\times g(t)$$

Et comme g est impaire : $g(-nt)=-g(nt)$

Ainsi $\boxed{\forall t\in\mathbb{R},\ \forall n\in\mathbb{Z},\ g(nt)=n\times g(t)}$

<u>1.(d)</u> On a donc d'après 1.(c) :
$$g(t)=g\left(q\times\frac{1}{q}t\right)=q\times g\left(\frac{1}{q}t\right)$$

et donc $\boxed{g\left(\frac{1}{q}t\right)=\frac{1}{q}\times g(t)}$

Puis $g(rt)=g\left(p\times\frac{1}{q}t\right)\underset{1.(c)}{=}p\times g\left(\frac{1}{q}t\right)=\frac{p}{q}\times g(t)$

donc $\boxed{g(rt)=r\times g(t)}$

2. On a $\lim_{n\to+\infty} r_n = t$ donc $\lim_{n\to+\infty} (t - r_n) = 0$

Comme $\lim_{t\to 0} g(t) = 0$ on a donc $\lim_{n\to+\infty} g(t - r_n) = 0$.

Mais d'après (R) :

$$g(t) = g\big((t - r_n) + r_n\big) = g(t - r_n) + g(r_n)$$

donc $g(r_n) = g(t) - g(t - r_n)$

donc $\lim_{n\to+\infty} g(r_n) = \lim_{n\to+\infty} g(t) - \lim_{n\to+\infty} g(t - r_n)$

$$= g(t) - 0 = \boxed{g(t)} \quad (*)$$

Mais comme $\forall n \in \mathbb{N},\ r_n \in \mathbb{Q}$ on a d'après 1.(d) :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ g(r_n) = g(r_n \times 1) = r_n \times g(1)$$

Or $\lim_{n\to+\infty} r_n \times g(1) = t \times g(1)$

donc on a aussi $\lim_{n\to+\infty} g(r_n) = t \times g(1) \quad (**)$

De $(*)$ et $(**)$ on peut déduire : $\forall t \in \mathbb{R},\ g(t) = t \times g(1)$

Donc si $a = g(1)$ on a : $\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ g(t) = at}$

3. <u>Cas 1</u> g est croissante sur $\mathbb{R}$.

On a $\forall n \in \mathbb{N}, \quad r_n \leq t \leq s_n$ donc $g(r_n) \leq g(t) \leq g(s_n)$

Mais comme r_n et s_n sont des nombres rationnels :

$$g(r_n) = r_n \times g(1) \text{ et } g(s_n) = s_n \times g(1)$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, \quad r_n \times g(1) \leq g(t) \leq s_n \times g(1)$

En posant $a = g(1)$: $\forall n \in \mathbb{N}, \ r_n \times a \leq g(t) \leq s_n \times a$

Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} r_n \times a = a \times t = \lim\limits_{n \to +\infty} s_n \times t$

et $\lim\limits_{n \to +\infty} g(t) = g(t)$

On a : $\quad at \leq g(t) \leq at$

Donc $\forall t \in \mathbb{R}, \ g(t) = at$ où $a = g(1)$

<u>Cas 2</u> g est décroissante sur $\mathbb{R}$.

Alors $-g$ vérifie aussi (R) et est croissante. Donc

$\forall t \in \mathbb{R}, \ -g(t) = a't$ où $a' = -g(1)$ d'après le cas 1

Si on pose $a = -a' = g(1)$ on a donc $\forall t \in \mathbb{R}, \ g(t) = at$

<u>Ccl</u> Dans les 2 cas : $\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \ g(t) = at \quad \text{où } a \in \mathbb{R}}$

4. Notons (i), (ii) et (iii) les trois prédicats.
Les implications (i) $\Longrightarrow$ (ii) et (i) $\Longrightarrow$ (iii) sont évidentes.
La question 2. donne (ii) $\Longrightarrow$ (i)
et la question 3. donne (iii) $\Longrightarrow$ (i).

On a donc (i) $\Longleftrightarrow$ (ii) et (i) $\Longleftrightarrow$ (iii)

donc $\boxed{(i) \Longleftrightarrow (ii) \Longleftrightarrow (iii)}$

Partie 3

1. exp est définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.
h est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
Par composée : g est définie sur $\mathbb{R}$.

$\boxed{\Longrightarrow}$ On suppose que g vérifie (R).

Soit $(s,t) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$.

$$h(st) = h(e^{\ln(st)}) = g(\ln(st)) = g(\ln s + \ln t)$$
$$= g(\ln s) + g(\ln t) = h(e^{\ln s}) + h(e^{\ln t}) = h(s) + h(t)$$

Donc h vérifie (L)

$\boxed{\Longleftarrow}$ On suppose que h vérifie (L)

Soit $(s,t) \in \mathbb{R}^2$.

$$g(s+t) = h(e^{s+t}) = h(e^s \times e^t) = h(e^s) + h(e^t)$$
$$= g(s) + g(t)$$

Donc g vérifie (R)

Par double-implication :

$$\boxed{h \text{ vérifie } (L) \iff g \text{ vérifie } (R)}$$

2. On définit la fonction g comme à la question 1.

Notons (iv), (v) et (vi) les trois prédicats.

$\boxed{(iv) \Longrightarrow (v)}$ On suppose (iv).

$$\forall t > 0, \quad h(t) = a . \ln t \text{ où } a \in \mathbb{R}.$$

Il est clair que h vérifie (L) et que

h est continue en 1

Donc h vérifie (v).

$\boxed{(v) \Longrightarrow (vi)}$ On suppose que h est continue en 1

ie $\lim_{t \to 1} h(t) = h(1)$.

Alors $\lim_{t \to 0} g(t) = \lim_{t \to 0} h(e^t) = \lim_{t \to 1} h(t) = h(1) = g(0)$

donc g est continue en 0

Donc vérifie (ii) et donc g vérifie (iii)

Comme $h = g \circ \ln$ on a h de même monotonie que g (car $\ln$ strictement croissante).

Donc vérifie (vi).

$\boxed{(vi) \Longrightarrow (iv)}$ On suppose que h vérifie (vi).

Comme $g = h \circ \exp$ alors g est aussi monotone.

Comme g vérifie (iii) elle vérifie aussi (i) :

$\forall t \in \mathbb{R}, \; g(t) = at$ où $a = g(1)$

Donc $\forall t > 0, \; h(t) = h(e^{\ln t}) = g(\ln t) = a \times \ln t$

ccl : $\boxed{(iv) \Longleftrightarrow (v) \Longleftrightarrow (vi)}$

Partie 4

1.(a) On suppose que $\exists C \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, f(t) = C$.

(E) donne $C = C^2$ donc $\boxed{C = 0 \text{ ou } 1}$

1.(b) On suppose que $f(t_0) = 0$.

Alors $\forall t \in \mathbb{R}$, $f(t) = f(t - t_0 + t_0) = f(t - t_0) \times f(t_0) = 0$

donc f <u>est la fonction nulle</u>.

1.(c) On suppose que $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) \neq 0$.

Alors $\forall t \in \mathbb{R}$, $f(t) = f\left(\frac{t}{2} + \frac{t}{2}\right) = f\left(\frac{t}{2}\right)^2 \geqslant 0$

et $f\left(\frac{t}{2}\right) \neq 0$

Donc $\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, f(t) > 0}$

2. g <u>est définie sur $\mathbb{R}$</u> car f est à valeurs strictement positives.

$\boxed{\Longrightarrow}$ On suppose que g vérifie (R).

Pour $(s,t) \in \mathbb{R}^2$: $f(s+t) = e^{g(s+t)} = e^{g(s)+g(t)}$

$= e^{g(s)} \times e^{g(t)} = f(s) \times f(t)$

donc f vérifie (E)

$\boxed{\Leftarrow}$ On suppose que f vérifie (E).

Alors $\forall (s,t) \in \mathbb{R}^2$, $g(s+t) = \ln(f(s+t)) = \ln(f(s) \times f(t))$
$= \ln(f(s)) + \ln(f(t)) = g(s) + g(t)$

Donc g vérifie (R).

Par double-implication : $\boxed{g \text{ vérifie (R)} \iff f \text{ vérifie (E)}}$

<u>3.</u> On définit la fonction g comme à la question précédente.

Notons (vii), (viii) et (ix) les trois prédicats.

$\boxed{(vii) \Rightarrow (viii)}$ On suppose qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que

$\forall t \in \mathbb{R}$, $f(t) = e^{at}$

Il est clair que f vérifie (E) et que f est continue en 0

donc f vérifie (viii).

$\boxed{(viii) \Rightarrow (ix)}$ On suppose que f vérifie (E) et que f est continue en 0.

Comme f n'est pas la fonction nulle on sait d'après la question 1. que $\forall t \in \mathbb{R}$, $f(t) > 0$.

Alors g est définie sur $\mathbb{R}$, vérifie (R) et est continue en 0. D'après la partie 2, elle est monotone.

Comme $f = \exp \circ g$ et $\exp$ est croissante sur $\mathbb{R}$ alors f est elle aussi monotone, de même monotonie que g. Donc f vérifie (ix).

$\boxed{(ix) \Longrightarrow (vii)}$ On suppose que f vérifie (E) et qu'elle est monotone. Comme f n'est pas la fonction nulle on sait d'après la question 1 que $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) > 0$.

Donc g est définie sur $\mathbb{R}$ et vérifie (R). Comme $g = \ln \circ f$ et $\ln$ est croissante alors g est elle aussi monotone. D'après la partie 2 il existe un réel a tel que $\forall t \in \mathbb{R}, g(t) = at$.

Alors $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = e^{g(t)} = e^{at}$.

Ccl $\boxed{(vii) \Longleftrightarrow (viii) \Longleftrightarrow (ix)}$