Exercice 1

1.(a) f est supposée dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

De plus : $\forall x > 0$, $f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$

donc f' est elle aussi dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ car composée de fonctions dérivables.

Donc $\boxed{f \text{ est 2 fois dérivable sur } \mathbb{R}_+^*}$

$$\forall x > 0, \quad f''(x) = \left(f\left(\frac{1}{x}\right)\right)' = -\frac{1}{x^2} \times f'\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$= -\frac{1}{x^2} \times f\left(\frac{1}{1/x}\right) = -\frac{1}{x^2} \times f(x)$$

donc $\boxed{\forall x > 0, \ x^2 \times f''(x) + f(x) = 0}$

1.(b) y est 2 fois dérivable sur $\mathbb{R}$ car composée de fonctions 2 fois dérivables.

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y'(t) = e^t \times f'(e^t)$$

$$y''(t) = e^t \times f'(e^t) + (e^t)^2 \times f''(e^t)$$

$$= e^t \cdot f'(e^t) + e^{2t} \times f''(e^t)$$

(2)

On a : $\forall x>0,\ x^2 \cdot f''(x) + f(x) = 0$

donc : $\forall t \in \mathbb{R},\ e^{2t} \cdot f''(e^t) + f(e^t) = 0$

donc $\forall t \in \mathbb{R},\ e^{2t} \cdot f''(e^t) + e^t \cdot f'(e^t) - e^t \cdot f'(e^t) + f(e^t) = 0$

donc $\forall t \in \mathbb{R},\ y''(t) - y'(t) + y(t) = 0$

donc $\boxed{y \text{ est solution sur } \mathbb{R} \text{ de } y'' - y' + y = 0}$

1.(c) On reconnaît une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.

L'équation caractéristique est :

$r^2 - r + 1 = 0$ donc $r = \dfrac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$

Donc il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tq :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ y(t) = e^{t/2} \times \left(\lambda \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{3} \cdot t}{2}\right) + \mu \cdot \sin\left(\frac{\sqrt{3} \cdot t}{2}\right) \right)$$

1.(d) comme $t = \ln x$ on a $f(x) = y(\ln x)$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Donc il existe } (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que :} \\ \forall x > 0,\ f(x) = \sqrt{x} \times \left(\lambda . \cos\left(\frac{\sqrt{3} . \ln x}{2}\right) + \mu . \sin\left(\frac{\sqrt{3} . \ln x}{2}\right)\right)\end{array}}$$

2. On vient de montrer que si f vérifie $(*)$ alors elle est de la forme ci-dessus.

Réciproquement, soit f de la forme ci-dessus.

En refaisant les calculs à l'envers on montre que :

$$\forall x > 0,\quad x^2 . f''(x) + f(x) = 0$$

Mais cela n'est pas $(*)$.

On a pour $x > 0$:

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\sqrt{x}} \times \left(\lambda . \cos\left(\frac{\sqrt{3} . \ln x}{2}\right) - \mu . \sin\left(\frac{\sqrt{3} . \ln x}{2}\right)\right)$$

car $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x$ et $\sin(-t) = -\sin t$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \times \left(\lambda . \cos\left(\frac{\sqrt{3} . \ln x}{2}\right) + \mu . \sin\left(\frac{\sqrt{3} . \ln x}{2}\right)\right)$$
$$+ \sqrt{x} . \left(-\frac{\sqrt{3} . \lambda}{2x} \sin\left(\frac{\sqrt{3} . \ln x}{2}\right) + \frac{\sqrt{3} . \mu}{2x} \cos\left(\frac{\sqrt{3} . \ln x}{2}\right)\right)$$

Donc : $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \left(\frac{\lambda + \mu\sqrt{3}}{2} \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{3} \cdot \ln x}{2}\right) + \frac{\mu - \lambda\sqrt{3}}{2} \sin\left(\frac{\sqrt{3} \ln x}{2}\right)\right)$

Donc il faut que : $\begin{cases} \lambda = \frac{\lambda + \mu\sqrt{3}}{2} \\ -\mu = \frac{\mu - \lambda\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

ce qui donne : $\mu = \mu$ et $\lambda = \mu\sqrt{3}$

Donc les solutions de $(*)$ sont les fonctions f de la forme :

$\forall x \in \mathbb{R}, \ f(x) = \sqrt{x} \times \mu \times \left(\sqrt{3} \cos\left(\frac{\sqrt{3} \cdot \ln x}{2}\right) + \sin\left(\frac{\sqrt{3} \cdot \ln x}{2}\right)\right)$

où $\mu \in \mathbb{R}$.

Mais $\sqrt{3} \cdot \cos t + \sin t = 2 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos t + \frac{1}{2} \cdot \sin t\right)$

$= 2 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{6} \cdot \cos t + \sin\frac{\pi}{6} \cdot \sin t\right)$

$= 2 \cdot \cos\left(t - \frac{\pi}{6}\right)$

Donc $\boxed{f(x) = 2\mu \cdot \sqrt{x} \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{3} \cdot \ln x}{2} - \frac{\pi}{6}\right)}$

EXERCICE 2

1. Pour $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \int_0^x \left(\sin(x)\cos(t) - \cos(x).\sin(t)\right).g(t)\,dt$$

$$= \sin(x).\int_0^x \cos(t).g(t)\,dt - \cos(x).\int_0^x \sin(t).g(t).dt$$

Les fonctions $x \longmapsto \cos(x).g(x)$ et $\longmapsto \sin(x).g(x)$ sont continues sur $\mathbb{R}$. D'après le théorème fondamental de l'analyse, les fonctions $\varphi : x \longmapsto \int_0^x \cos(t).g(t)\,dt$ et $\psi : x \longmapsto \int_0^x \sin(t).g(t)\,dt$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ avec :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi'(x) = \cos(x).g(x) \text{ et } \psi'(x) = \sin(x).g(x)$$

Par sommes et produits de fonctions dérivables, f est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \cos(x).\varphi(x) + \cancel{\sin(x).\cos(x).g(x)}$$
$$+ \sin(x).\psi(x) - \cancel{\cos(x).\sin(x).g(x)}$$
$$= \int_0^x \left(\cos(x).\cos(t) + \sin(x).\sin(t)\right).g(t)\,dt$$

ie $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \int_a^x \cos(t-x).g(t)\,dt}$

1.(b) On a vu que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \cos(x).\varphi(x) + \sin(x).\psi(x)$$

donc f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) = -\sin x.\varphi(x) + \cos^2(x).g(x) + \cos(x).\psi(x) + \sin^2(x).g(x)$$

$$= -f(x) + (\cos^2(x) + \sin^2(x)).g(x)$$

donc $\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) + f(x) = g(x)$

donc $\boxed{f \text{ est solution de } y'' + y = g(x)}$

2. Equation homogène $y'' + y = 0$:

les solutions sont les fonctions $x \longmapsto \lambda.\cos x + \mu.\sin x$ où $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$

Donc les solutions sur $\mathbb{R}$ de $y'' + y = g(x)$ sont les fonctions $\boxed{x \longmapsto \lambda\cos x + \mu.\sin x + \int_b^x \sin(x-t).g(t)\,dt \text{ où } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2}$