

(1)

Coréction du DS1

Exercice 2

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note $P(n) = "M_n = (-2)^n + 3^n"$

Initialisation. $(-2)^0 + 3^0 = 2 = M_0$ donc $P(0)$ est vrai.

$(-2)^1 + 3^1 = 1 = M_1$ donc $P(1)$ est vrai.

Héréditè à 2 pas. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ et $P(n+1)$ sont vrais.

but $P(n+2)$ est vrai i.e $M_{n+2} = (-2)^{n+2} + 3^{n+2}$

$$\text{Car } M_{n+2} = M_{n+1} + 6 \cdot M_n$$

D'après $P(n)$ on a $M_n = (-2)^n + 3^n$

et d'après $P(n+1)$ on a $M_{n+1} = (-2)^{n+1} + 3^{n+1}$

$$\begin{aligned} \text{Donc } M_{n+2} &= (-2)^{n+1} + 3^{n+1} + 6 \cdot ((-2)^n + 3^n) \\ &= (1-3) \cdot (-2)^{n+1} + (1+2) \cdot 3^{n+1} \\ &= (-2)^{n+2} + 3^{n+2} \end{aligned}$$

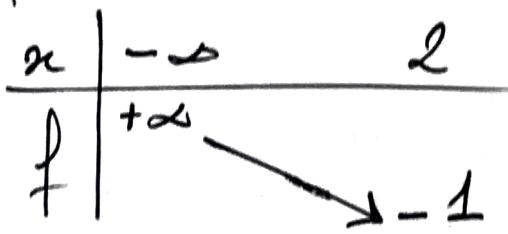
Donc $P(n+2)$ est vrai.

Cd Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M_n = (-2)^n + 3^n$

Exercice 3

(2)

1. f est dérivable sur $]-\infty, 2]$ et $\forall x \leq 2$, $f'(x) = 2x - 4 = 2(x-2)$



f est continue et strictement décroissante sur $]-\infty, 2]$

donc elle induit une bijection de $]-\infty, 2]$ sur $[-1, +\infty[$.

Pour $x \leq 2$ et $y \geq -1$ on a :

$$y = f(x) \iff y = x^2 - 4x + 3 \iff x^2 - 4x + (3-y) = 0$$

$$\Delta = 16 - 4(3-y) = 4(1+y) \geq 0 \text{ car } y \geq -1$$

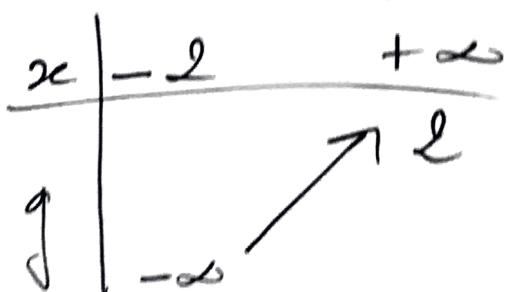
$$\text{Donc: } y = f(x) \iff x = \frac{4 \pm \sqrt{4(1+y)}}{2} = 2 \pm \sqrt{1+y}$$

$$\iff x = 2 - \sqrt{1+y} \text{ car } x \leq 2$$

$\boxed{\forall y \geq -1, f^{-1}(y) = 2 - \sqrt{1+y}}$

2. g est dérivable sur $]-2, +\infty[$

$$\text{et } \forall x > -2, g'(x) = \frac{2(x+2) - (2x-1)}{(x+2)^2} = \frac{5}{(x+2)^2} > 0$$



(3)

g est continue et strictement croissante sur $]-2, +\infty[$

donc elle induit une bijection de $]-2, +\infty[$ vers $]-\infty, 2[$.

Pour $x > -2$ et $y < 2$ on a:

$$\begin{aligned} y = g(x) \iff y = \frac{2x-1}{x+2} \iff xy + 2y = 2x - 1 \\ \iff x(y-2) = -(2y+1) \\ \iff x = \frac{2y+1}{2-y} \text{ car } y \neq 2 \end{aligned}$$

Donc $\boxed{\forall y < 2, g^{-1}(y) = \frac{2y+1}{2-y}}$

3. * si $g \in \mathbb{D}$ alors $h(g) \in \mathbb{P}$.

Soit $g \in \mathbb{D}$. On note $g = x+i y$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} h(g) &= \frac{g+i}{g-i} = \frac{x+i(y+1)}{x+i(y-1)} = \frac{(x+i(y+1))(x-i(y-1))}{x^2 + (y-1)^2} \\ &= \frac{x^2 + y^2 - 1 + i(x(y+1) - x(y-1))}{x^2 + (y-1)^2} \end{aligned}$$

$$= \frac{x^2 + y^2 - 1 + 2ix}{x^2 + (y-1)^2}$$

$$\text{donc } \operatorname{Re}(h(g)) = \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + (y-1)^2} < 0 \quad \text{car } x^2 + y^2 < 1 \\ \text{car } g \in \mathbb{D}$$

donc $h(g) \in \mathbb{P}$.

(4)

* Soit $Z \in P$ et $g \in D$.

$$h(g) = Z \iff \frac{g+i}{g-i} = Z$$

$$\iff g+i = Zg-iZ$$

$$\iff (1-Z)g = -i(Z+1)$$

$$\iff g = i \cdot \frac{Z+1}{Z-1} \quad \text{car } Z \neq 1$$

$$\quad \quad \quad \text{car } \operatorname{Re}(Z) < 0$$

et si on note $Z = x+iy$ avec $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\left| i \frac{Z+1}{Z-1} \right|^2 = \frac{|Z+1|^2}{|Z-1|^2} = \frac{(x+1)^2 + y^2}{(x-1)^2 + y^2} = \frac{x^2 + y^2 + 2x + 1}{x^2 + y^2 - 2x + 1}$$

or $Z \in P$ donc $x < 0$

$$\text{donc } 0 < (x+1)^2 + y^2 = x^2 + y^2 + 2x + 1 < x^2 + y^2 - 2x + 1$$

$$\text{donc } \left| i \frac{Z+1}{Z-1} \right|^2 < 1 \text{ donc } \left| i \frac{Z+1}{Z-1} \right| < 1$$

$$\text{donc } i \frac{Z+1}{Z-1} \in D.$$

Donc l'équation $h(g) = Z$ a une unique solution
 $g \in D$.

Ainsi h induit une bijection de D sur P

$$\text{et } \boxed{h(Z \in P), h^{-1}(Z) = i \frac{Z+1}{Z-1}}$$

Exercice 4

1. Comme $A \subseteq E$ et $E \notin A$ on sait que il existe $x_0 \in E$ tel que $x_0 \notin A$.

Par $X = \{x_0\}$ on a $\varphi_A(X) = \{x_0\} \cap A = \emptyset = \emptyset \cap A = \varphi_A(\emptyset)$

Comme $X \neq \emptyset$, ceci prouve que φ_A n'est pas injective sur $P(E)$

De plus $\forall X \in P(E)$, $\varphi_A(X) = X \cap A \subseteq A \neq E$

donc E n'a pas d'antécédent par φ_A .

Donc φ_A n'est pas surjective de $P(E)$ vers $P(E)$.

Si $A = E$ alors $\forall X \in P(E)$, $\varphi_A(X) = X \cap E = X$

donc $\varphi_A = \text{id}_{P(E)}$

Donc φ_A est bijection de $P(E)$ vers $P(E)$.

2. Si $A \neq \emptyset$ il existe $x_0 \in A$.

Alors $\psi_A(\{x_0\}) = \{x_0\} \cup A = A = \emptyset \cup A = \psi_A(\emptyset)$

Comme $\{x_0\} \neq \emptyset$ ceci prouve que ψ_A n'est pas injective sur $P(E)$

De plus $\forall X \in P(E)$, $\psi_A(X) = X \cup A \neq \emptyset$

car $x_0 \in A$ donc $x_0 \in X \cup A$.

ψ n'a donc pas d'antécédent par ψ_A .

Donc ψ_A n'est pas surjective de $P(E)$ vers $P(E)$.

Si $A = \emptyset$: $\forall X \in P(E)$, $\varphi_A(X) = \emptyset \cup X = X$

donc $\varphi_A = \text{id}_{P(E)}$.

Alors φ_A est bijective de $P(E)$ vers $P(E)$.