EXERCICE 1 : Endomorphisme et équation différentielle

Soit $\varphi : C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R}) \longrightarrow C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$ définie par $\varphi(f) = f'' - 3f' + 2f$. Montrer que φ est un endomorphisme et préciser une base de son noyau.

EXERCICE 2 : Fonction caractéristique d'une VAR

Dans cet exercice, N est un entier naturel et X est une VAR définie sur univers fini et telle que $X(\Omega) \subseteq [\![0, N]\!]$.

On appelle fonction caractéristique d'une variable aléatoire X l'application $\varphi_X : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par $\varphi_X(u) = \mathbb{E}\big(\mathrm{e}^{iuX}\big)$.

1. Montrer que :
$$\forall u \in \mathbb{R}, \quad \varphi_X(u) = \sum_{k=0}^{N} \mathrm{e}^{iuk}\mathbb{P}(X = k)$$
2. Vérifier que φ_X est 2π-périodique et de classe C^∞.
Calculer $\varphi_X(0)$. Comment interpréter $\varphi'_X(0)$ et $\varphi''_X(0)$?
3. Calculer la fonction caractéristique d'une variable X suivant une loi de Bernoulli de paramètre p.
Même question avec une loi binomiale de paramètres n et p.
4. Soient X une variable aléatoire réelle et $k \in [\![0, N]\!]$. Vérifier
$$P(X = k) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi_X(u)\mathrm{e}^{-iuk}\mathrm{d}u$$
Si Y est une VAR à valeurs dans $[\![0, N]\!]$, en déduire :
$$\varphi_X = \varphi_Y \Longrightarrow X \text{ et } Y \text{ suivent la même loi}$$