EXERCICE 1 : Produits infinis

On considère dans tout l'exercice une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de **réels non nuls**. On lui associe la suite $(P_N)_{N\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \quad P_N = \prod_{n=1}^{N} u_n = u_1 \times u_2 \times \cdots \times u_n \times \cdots \times u_N$$

On dira que le produit infini $\prod_{n\geq 1} u_n$ est convergent lorsque la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ admet une **limite finie non nulle**, et cette limite sera notée $\prod_{n=1}^{+\infty} u_n$. Dans le cas contraire, on dira que le produit diverge.

On peut aussi généraliser ces notions au produit infini $\prod_{n\geq n_0} u_n$ et à sa limite $\prod_{n=n_0}^{+\infty} u_n$.

Partie I : Premiers résultats

1. **Condition nécessaire de convergence.**
   (a) Pour $N \geq 2$, déterminer u_N en fonction de P_N et P_{N-1}.
   En déduire que si le produit infini $\prod_{n\geq 1} u_n$ converge, alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$.
   (b) On pose pour tout $n \geq 1$, $u_n = 1 + \dfrac{1}{n}$. Vérifier que, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$: $P_N = N + 1$.
   Le produit infini $\prod_{n\geq 1}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$ est-il convergent ?
   (c) La condition obtenue à la question 1.(a) est-elle suffisante ?
2. **Un premier exemple de produit infini.**
   On pose pour tout $n \geq 2$, $u_n = 1 - \frac{1}{n^2}$.
   Vérifier que, pour tout $N \geq 2$: $P_N = \prod_{n=2}^{N} \dfrac{\frac{n+1}{n}}{\frac{n}{n-1}}$.
   Le produit infini $\prod_{n\geq 2}\left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right)$ est-il convergent ? Si oui donner la valeur de $\prod_{n=2}^{+\infty}\left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right)$.
3. **Un second exemple.**
   (a) Soit a un réel différent de $p\pi$, pour tout $p \in \mathbb{Z}$.
   On pose pour tout $N \in \mathbb{N}^*$: $P_N = \prod_{n=1}^{N} \cos\left(\dfrac{a}{2^n}\right)$.
   Montrer que $P_N \times \sin\left(\frac{a}{2^N}\right) = \frac{1}{2^N}\sin(a)$.
   Le produit infini $\prod_{n\geq 1} \cos\left(\dfrac{a}{2^n}\right)$ est-il convergent ? Si oui donner la valeur de $\prod_{n=1}^{+\infty} \cos\left(\dfrac{a}{2^n}\right)$.

(b) Vérifier que pour tout $n \geq 1$: $\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) = \sqrt{\frac{1+\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)}{2}}$. En déduire la formule suivante :

$$\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \times \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} \times \dots$$

Partie II : Liens entre produits infinis et séries.

4. **Équivalence entre produits infinis et séries.**
On suppose dans cette question (et seulement dans cette question) que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$.
(a) Monter qu'il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que : $\forall n \geq n_0$, $u_n > 0$.
(b) On pose, pour tout $N \geq n_0$: $S_N = \sum_{n=n_0}^{N} \ln(u_n)$.
Établir que le produit infini $\prod_{n\geq n_0} u_n$ converge si et seulement si la série $\sum_{n\geq n_0} \ln(u_n)$ converge. Dans ce cas donner une formule reliant $\prod_{n=n_0}^{+\infty} u_n$ et $\sum_{n=n_0}^{+\infty} \ln(u_n)$.

5. **Une condition nécessaire et suffisante de convergence dans un cas particulier.**
On suppose dans cette question (et seulement dans cette question) que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 1 + v_n$, où $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de **réels positifs qui converge vers** 0.
(a) Vérifier que : $\forall x \geq 0$, $\ln(1+x) \leq x$.
(b) En déduire que si la série $\sum_{n\geq 1} v_n$ converge, alors le produit infini $\prod_{n\geq 1}(1+v_n)$ converge.
(c) Réciproquement, montrer que si le produit infini $\prod_{n\geq 1}(1+v_n)$ converge, alors la série $\sum_{n\geq 1} v_n$ converge.
(d) Donner alors une nouvelle preuve de la divergence de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$.
(e) Dans cette dernière question, on suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 1 + v_n$, où $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de réels de l'intervalle $]-1, 0]$ qui converge vers 0.
Montrer que le produit infini $\prod_{n\geq 1}(1+v_n)$ converge si et seulement si la série $\sum_{n\geq 1} v_n$ converge.

Partie III : Exemples non triviaux.

On utilisera les résultats de convergence de produits infinis établis dans les parties I et II.

6. **Exemple 1.**
Soit $\alpha > 0$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = 1 + \alpha^{(2^n)}$.
(a) Dans le cas où $\alpha \geq 1$, dire si le produit infini $\prod_{n\geq 1}\left(1+\alpha^{(2^n)}\right)$ est convergent ou divergent.
(b) On suppose $\alpha \in]0,1[$. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} n^2 \alpha^{(2^n)}$.
En utilisant la question 5., en déduire que le produit infini $\prod_{n\geq 1}\left(1+\alpha^{(2^n)}\right)$ est convergent.
(c) Toujours pour $\alpha \in]0,1[$, et pour $N \in \mathbb{N}^*$, calculer $(1-\alpha^2)P_N$. En déduire la valeur de $\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1+\alpha^{(2^n)}\right)$.

7. **Exemple 2.**
   Soit $-1 < x < 1$.
   (a) Pour $N \geq 1$, vérifier que :

$$\prod_{n=1}^{2N} \left(1 - x^n\right) = \prod_{n=1}^{N} \left(1 - x^{2n-1}\right) \times \prod_{n=1}^{N} \left(1 - x^{2n}\right)$$

   et ensuite que :

$$\prod_{n=N+1}^{2N} \left(1 - x^n\right) \times \prod_{n=1}^{N} \frac{1}{1 - x^{2n-1}} = \prod_{n=1}^{N} \left(1 + x^n\right)$$

   (b) Justifier la convergence des produits infinis $\prod_{n\geq 1} \left(1+x^n\right)$ et $\prod_{n\geq 1} \frac{1}{1 - x^{2n-1}}$ et la formule :

$$\prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + x^n\right) = \prod_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1 - x^{2n-1}}$$

8. **Exemple 3.**
   (a) Justifier la convergence du produit infini $\prod_{n\geq 1} \left(1 - \frac{1}{4n^2}\right)$.
   (b) Vérifer que, pour tout $N \geq 1$:

$$\prod_{n=1}^{N} \left(1 - \frac{1}{4n^2}\right) = \frac{(2N)! \times (2N+1)!}{(N!)^4 \times 2^{4N}}$$

   (c) En admettant la formule de Stirling $N! \underset{N\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi N} \times N^N \times \mathrm{e}^{-N}$, en déduire que :

$$\prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{4n^2}\right) = \frac{2}{\pi}$$