PCSI 1 - DEVOIR MAISON N ° 8 **Année scolaire 2019-2020**
A rendre le lundi 6 janvier 2019

Les questions marquées d'une [*] sont facultatives.

<u>EXERCICE 1</u> : Applications du calcul matriciel

Soient $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 \\ -3 & 3 & -3 \\ -2 & 4 & -3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. (a) Montrer que P est inversible et donner P^{-1}.
   (b) Calculer $D = PAP^{-1}$ et $T = PBP^{-1}$.
   (c) En déduire sous forme de tableau les matrices A^n et B^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Dans cette question on étudie des suites réelles (x_n), (y_n) et (z_n) définies par la donnée de x_0, y_0, z_0 et les relations de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x_{n+1} & = & 2x_n - 4y_n + 3z_n \\ y_{n+1} & = & -3x_n + 3y_n - 3z_n \\ z_{n+1} & = & -2x_n + 4y_n - 3z_n \end{array} \right.$$

   Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
   (a) Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$ et en déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$.
   (b) En déduire les expressions de x_n, y_n et z_n en fonction de n et des réels x_0, y_0 et z_0.
   (c) Donner une CNS sur les réels x_0, y_0 et z_0 pour que la suite (x_n) converge.
   (d) On suppose cette condition remplie. Donner un équivalent simple de x_n lorsque $n \to +\infty$.
3. Dans cette question on cherche les fonctions x, y et z dérivables sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ vérifiant le système différentiel :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x'(t) & = & 2x(t) - 4y(t) + 3z(t) \\ y'(t) & = & -3x(t) + 3y(t) - 3z(t) \\ z'(t) & = & -2x(t) + 4y(t) - 3z(t) \end{array} \right.$$

   Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et $Y(t) = P \times X(t)$.
   (a) Vérifier que $\forall t \in \mathbb{R}$, $Y'(t) = P \times X'(t)$.
   (b) En déduire que : $\Big(\forall t \in \mathbb{R},\ X'(t) = A \times X(t) \Big) \Longleftrightarrow \Big(\forall t \in \mathbb{R},\ Y'(t) = D \times Y(t) \Big)$.
   (c) On note $Y(t) = \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \\ \gamma(t) \end{pmatrix}$. En utilisant que $Y'(t) = D \times Y(t)$, donner une expression de $\alpha(t)$, $\beta(t)$ et $\gamma(t)$.
   (d) En remarquant que $X(t) = P^{-1} \times Y(t)$ donner une expression de $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$.

4. **[*]** Reprendre la question 2. avec les relations de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x_{n+1} & = & 2x_n - y_n + z_n \\ y_{n+1} & = & -x_n + 2y_n - z_n \\ z_{n+1} & = & y_n + z_n \end{array} \right.$$

5. **[*]** Reprendre la question 3. avec le système différentiel :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x'(t) & = & 2x(t) - y(t) + z(t) \\ y'(t) & = & -x(t) + 2y(t) - z(t) \\ z'(t) & = & y(t) + z(t) \end{array} \right.$$

<u>EXERCICE 2</u> : Calcul d'une limite

Vérifier que $\left[1 + \sin\left(\dfrac{1}{n}\right)\right]^n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}$.

<u>EXERCICE 3</u> : Un résultat général

Soit (u_n) une suite décroissante de réels telle que $u_n + u_{n+1} \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.

1. Montrer que (u_n) a une limite $\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ puis que $\ell = 0$.
2. Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} + u_n \leq 2u_n \leq u_n + u_{n-1}$ et en déduire que $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n}$.