PCSI1 - DEVOIR SURVEILLE N ° 1 **Année scolaire 2018-2019**
Samedi 14 septembre 2019

Durée du devoir : 1h00.

Les calculatrices ne sont pas autorisées. Les exercices sont indépendants, on les traitera dans l'ordre souhaité.

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Exercice 1 : Question de cours

Soient deux applications $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$.

1. Montrer que :
$$\left(f \text{ est injective sur } E \text{ et } g \text{ injective sur } F \right) \Longrightarrow g \circ f \text{ est injective sur } E$$
2. Montrer que :
$$\left(f \text{ est surjective de } E \text{ vers } F \text{ et } g \text{ surjective de } F \text{ vers } G \right)$$
$$\Longrightarrow g \circ f \text{ est surjective de } E \text{ vers } G$$
3. Montrer que :
$$\left(f \text{ est bijective de } E \text{ vers } F \text{ et } g \text{ bijective de } F \text{ vers } G \right)$$
$$\Longrightarrow g \circ f \text{ est bijective de } E \text{ vers } G$$

Exercice 2 : Une suite réelle

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+2} - u_{n+1} - 6u_n = 0$.
Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-2)^n + 3^n$.

<u>Exercice 3</u> : Des fonctions numériques

1. Soit $f :]-\infty, 2] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 - 4x + 3$.
   Montrer que f induit une bijection de $]-\infty, 2]$ sur $[-1, +\infty[$, encore notée f.
   Déterminer l'expression de sa bijection réciproque f^{-1}.
2. Soit $g :]-2, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \dfrac{2x-1}{x+2}$.
   Montrer que g induit une bijection de $]-2, +\infty[$ sur $]-\infty, 2[$, encore notée g.
   Déterminer l'expression de sa bijection réciproque g^{-1}.
3. Pour $z \in \mathbb{C}\backslash\{i\}$, on pose $h(z) = \dfrac{z+i}{z-i}$. Montrer que h induit une bijection de $D = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$ sur $P = \{z \in \mathbb{C}; \mathcal{R}\mathrm{e}(z) < 0\}$. Préciser h^{-1}.

<u>Exercice 4</u> : Deux fonctions d'ensembles

Soient E un ensemble puis A une partie de E fixée.
Pour tout $X \in \mathcal{P}(E)$, on pose $\phi_A(X) = X \cap A$ et $\psi_A(X) = X \cup A$.
On définit ainsi deux applications de $\mathcal{P}(E)$ vers $\mathcal{P}(E)$.

1. Si $A \neq E$, montrer que ϕ_A n'est ni injective, ni surjective (pour l'injectivité, considérer $x_0 \in E$ tel que $x_0 \notin A$).
   Et si $A = E$?
2. Si $A \neq \emptyset$, montrer que ψ_A n'est ni injective, ni surjective.
   Et si $A = \emptyset$?