PCSI1 - DEVOIR SURVEILLE N°8 **Année scolaire 2019-2020**
Samedi 30 mai 2020

Durée du devoir : 2h00.

Les calculatrices ne sont pas autorisées.

EXERCICE 1 : Orthogonal dans $\mathbb{R}^4$

Dans $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire usuel noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$, on pose : $V_1 = (1, 2, -1, 1)$ et $V_2 = (0, 3, 1, -1)$.
On pose $\mathbb{F} = \mathrm{Vect}(V_1, V_2)$.
Déterminer une base orthonormale de $\mathbb{F}$ et un système d'équations cartésiennes de $\mathbb{F}^\perp$.

EXERCICE 2 : Autour de la série harmonique

1. Question de cours : Rappeler sans démonstration pour quelles valeurs du réel α la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ est convergente.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) On pose pour tout $p \in \mathbb{N}$, $s_p = \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+p}$
   Vérifier que la suite $(S_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est croissante et divergente.
   (b) Montrer qu'il existe au moins un entier naturel p tel que l'on ait :
   $$\sum_{k=0}^{p} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+p} > 1$$

On note alors $a_n = n + p_n$ où p_n est le plus petit entier p vérifiant cette propriété et on pose : $u_n = \dfrac{a_n}{n}$.
On a donc : $\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1} + \cdots + \dfrac{1}{a_n} > 1$.

3. La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est-elle convergente ?
4. Prouver pour $n \geqslant 2$ que l'on a :
   $$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n-1} < 1 \text{ et } \sum_{k=0}^{2n-2} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{3n-2} > 1$$
5. Montrer que si la suite (u_n) converge vers une limite ℓ, alors $\ell \in [2, 3]$.
6. Prouver que l'on a, pour tout entier naturel non nul n :
   $$1 < \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{a_n} \leqslant 1 + \frac{1}{a_n}$$
7. Démontrer que l'on a, pour tout entier naturel non nul n :
   $$1 - \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{a_n} \leqslant \int_n^{a_n} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{a_n - 1} \leqslant 1$$
8. En déduire que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

EXERCICE 3 : Triangularisation d'un endomorphisme

On considère la matrice $A = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Pour tout réel λ, on pose $E_\lambda = \ker(A - \lambda I_4)$ et $F_\lambda = \ker\big((A-\lambda I_4)^2\big)$.

On note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

On désigne par id l'application identité de $\mathbb{R}^4$.

1. Donner la définition et l'expression analytique de l'endomorphisme u canoniquement associé à la matrice A.
2. (a) Déterminer le rang de A.
   (b) Déterminer une équation cartésienne de $\mathrm{Im}(A)$ (dans la base $\mathscr{B}$), et une base de $\mathrm{Ker}(A)$.
   (c) $\mathrm{Ker}(A)$ et $\mathrm{Im}(A)$ sont-ils supplémentaires dans $\mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})$?
3. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
   (a) Justifier que $E_\lambda \subseteq F_\lambda$.
   (b) Donner une expression factorisée du polynôme $\chi(\lambda) = \det(A - \lambda I_4)$.
   (c) Montrer que : $E_\lambda \neq \{0_{4,1}\} \iff \lambda \in \{0;1\}$.
   (d) Déterminer les valeurs de λ pour lesquelles $F_\lambda \neq \{0_{4,1}\}$.
4. Construire une base $\mathscr{C} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$ de $\mathbb{R}^4$ telle que :
$$\varepsilon_1 \in \mathrm{Ker}(u), \quad \varepsilon_3 \in \mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}), \quad u(\varepsilon_2) = \varepsilon_1, \quad (u-\mathrm{id})(\varepsilon_4) = \varepsilon_3$$
   On impose de plus que les coordonnées de ε_1, ε_2, ε_3, ε_4 dans la base $\mathscr{B}$ appartiennent toutes à $\{-1;0;1\}$.
5. Justifier que $\varepsilon_2 \in \mathrm{Ker}(u^2)$ et $\varepsilon_4 \in \mathrm{Ker}\big((u-\mathrm{id})^2\big)$, puis montrer que $\mathrm{Ker}(u^2)$ et $\mathrm{Ker}\big((u-\mathrm{id})^2\big)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.
6. (a) Remplir la matrice T de u dans la base $\mathscr{C}$.
   (b) Déterminer, pour $n \geq 1$, la matrice T^n.
7. Remplir la matrice de passage P de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{C}$. Calculer son inverse.
8. Déterminer, pour $n \geq 1$, la matrice A^n.