ALGEBRE

Exercice 1 : question de cours

Soient E et F deux $\mathbb{K}-$ espaces vectoriels ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et f une application linéaire de E dans F. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E avec n=dim(E).

Montrer que f est injective si et seulement si la famille $(f(e_1), \cdots, f(e_n))$ est libre.

Exercice 2 : calcul de déterminant

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Soit n un entier non nul et Δ_n le déterminant de la matrice $n \times n$ suivant :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 \\ c & a & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & a & b \\ 0 & \cdots & 0 & c & a \end{vmatrix}$$

1. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $\Delta_{n+2} = a\Delta_{n+1} - bc\Delta_n$.
2. On suppose que $a^2 = 4bc$. Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a $\Delta_n = \dfrac{(n+1)a^n}{2^n}$.

Problème

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si A et U sont deux matrices de $M_n(\mathbb{R})$, on dit que U est un **pseudo-inverse** de A si les trois relations suivantes sont vérifiées :

- $AUA = A$,
- $UAU = U$,
- $UA = AU$.

I-Préliminaires.

1. Soit P une matrice inversible de $M_n(\mathbb{R})$. Montrer que P admet un pseudo-inverse qu'on explicitera.
2. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ où $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que A admet un pseudo-inverse noté U. Soit P une matrice inversible de $M_n(\mathbb{R})$. Montrer que $P^{-1}AP$ admet un pseudo-inverse.

II-Etude d'un exemple.

Dans cette partie $n = 3$. On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

On définit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme canoniquement associé à A.

1. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Déterminer $f(x, y, z)$.
2. Déterminer une base de ker(f) ainsi que sa dimension.
3. La matrice A est-elle inversible ? Préciser son rang.

4. On pose $f_1 = (0,1,2)$, $f_2 = (1,2,3)$ et $f_3 = (1,-1,1)$. Et on note $\mathcal{C}$ la famille de vecteurs (f_1, f_2, f_3). Montrer que $\mathcal{C}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
5. Montrer que (f_1, f_2) est une base de $\mathrm{Im}(f)$. Que peut-on dire des sous-espaces vectoriels $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$?
6. Ecrire la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{C}$. Calculer son inverse.
7. En déduire la matrice de f dans la base $\mathcal{C}$. On la notera A'.
   On trouvera une matrice de la forme $A' = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ \gamma & \delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ où $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ sont des réels que l'on explicitera. On posera pour la suite $A_1 = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$.
8. Justifier que A_1 est inversible et donner son inverse $A^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{pmatrix}$ où $(\alpha', \beta', \gamma', \delta')$ sont des réels que l'on explicitera.
9. Montrer que la matrice $U' = \begin{pmatrix} \alpha' & \beta' & 0 \\ \gamma' & \delta' & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est un pseudo-inverse de la matrice A'.
10. Déterminer alors un pseudo-inverse U de la matrice A que l'on exprimera en fonction de matrices définies auparavant dans cette partie (on ne cherchera pas à calculer U).
11. Notons g l'endomorphisme canoniquement associé à UA. Déterminer la matrice de g dans $\mathcal{C}$.
12. En déduire la nature et les éléments caractéristiques de g.

III-Unicité du pseudo-inverse.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. On suppose que A admet deux pseudo-inverses U et U'.

1. En calculant le produit $AUAU'$ de deux manières différentes, montrer que $UA = AU'$.
2. En déduire que $U = U'$.

IV-Condition d'existence du pseudo-inverse.

Dans cette partie, $A \in M_n(\mathbb{R})$ où $n \geq 2$ et f désigne l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A.

1. **Dans cette question uniquement**, on suppose que A admet un pseudo-inverse U. On désigne par h l'endormorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à U.
   (a) Montrer que $(AU)^2 = AU$. Que peut-on en déduire de l'endomorphisme $f \circ h$?
   (b) Montrer que $\ker(f)$ $=\ker(f \circ h)$, puis que $\mathrm{Im}(f)$ $=\mathrm{Im}(f \circ h)$.
   (c) En déduire que $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^n$.
2. **Dans cette question uniquement**, on suppose que $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^n$.
   (a) Montrer que si $\ker(f) = \{0\}$ alors A admet un pseudo-inverse.
   (b) Montrer que si $\mathrm{Im}(f) = \{0\}$ alors A admet un pseudo-inverse.
   On admettra que si $\ker(f) \neq \{0\}$ et $\mathrm{Im}(f) \neq \{0\}$ alors A admet un pseudo-inverse.
3. Enoncer une condition nécessaire et suffisante sur A pour que A admette un pseudo-inverse (le justifier).