EXERCICE 1

1. $P(1) = 1 + b - a + 2a - 3b + a - 2b + 1$

$\quad = 2 - 4b + 2a$

$P'(1) = 4 + 3(b - a) + 2(2a - 3b) + a - 2b$

$\quad = 4 + 2a - 5b$

D'après le cours :

1 est racine multiple de $P \iff P(1) = P'(1) = 0$

$$\iff \begin{cases} 2a - 4b = -2 \\ 2a - 5b = -4 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2a - 4b = -2 \\ -b = -2 \end{cases}$$

$$\iff \boxed{\begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \end{cases}}$$

2. $P^{(3)}(1) = 12 + 6(b - a) + 2(2a - 3b)$

$\quad = 12 - 2a = 6 \neq 0$

D'après le cours 1 est racine de P d'ordre de multiplicité $\boxed{m = 2}$.

3. $P(X) = X^4 - X^3 - X + 1$

Comme 1 est racine de P d'ordre 2, il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que :

$$P(X) = (X-1)^2 \times Q(X).$$

Comme $\deg(P) = 4$ on a $\deg(Q) = 2$

Comme P est unitaire, Q l'est aussi donc :

$$\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 ; \quad Q(X) = X^2 + \alpha X + \beta$$

On a donc :

$$X^4 - X^3 - X + 1 = (X-1)^2 \times (X^2 + \alpha X + \beta)$$

En évaluant en 0 : $1 = \beta$

En égalisant le coefficient de X de chaque côté :

$$-1 = \alpha - 2\beta$$

donc $\alpha = 1$.

Donc
$$\boxed{\begin{aligned} P(X) &= (X-1)^2 \times (X^2 + X + 1) \quad \text{dans } \mathbb{R}[X] \\ &= (X-1)^2 \times (X-j)(X-\bar{j}) \quad \text{dans } \mathbb{C}[X] \end{aligned}}$$

4. On a :

$$P(X^2) = (X^2-1)^2 \times (X^2 - j)(X^2 - \bar{j})$$

or $X^2 - 1 = (X-1)\times(X+1)$

et $j = e^{i\frac{2\pi}{3}} = (e^{i\pi/3})^2$ donc $X^2 - j = (X - e^{i\pi/3})(X + e^{i\pi/3})$

et $X^2 - \bar{j} = (X - e^{-i\pi/3})(X + e^{-i\pi/3})$

Donc $P(X^2) = (X-1)^2(X+1)^2(X - e^{i\pi/3})(X+e^{i\pi/3})(X - e^{-i\pi/3})(X+e^{-i\pi/3})$

dans $\mathbb{C}[X]$

Dans $\mathbb{R}[X]$:

$$P(X^2) = (X-1)^2(X+1)^2(X^2 - \sqrt{3}X + 1)(X^2 + \sqrt{3}X + 1)$$

EXERCICE 2

1.(a) $\binom{n}{k}$ **1.(b)** n^p **1.(c)** $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$ **1.(d)** $n!$

2.(a) Il y en a $n!$.
Ce sont toutes les permutations du n_code $(\{1\},\{2\},\dots,\{n\})$.

2.(b) Les 3_codes sont :

$(\{1\},\{2\},\{3\})$ $(\{2\},\{1\},\{3\})$ $(\{2\},\{3\},\{1\})$ $(\{3\},\{2\},\{1\})$
$(\{1\},\{3\},\{2\})$ $(\{3\},\{1\},\{2\})$
$(\{1,2\},\{3\})$ $(\{3\},\{1,2\})$ $(\{1,3\},\{2\})$ $(\{2\},\{1,3\})$
$(\{2,3\},\{1\})$ $(\{1\},\{2,3\})$

$(\{1,2,3\})$

Donc $\boxed{a_3 = 13}$

3.(a) Il y en a $\binom{n}{k}$.

3.(b) On choisit P_1 à k éléments : $\binom{n}{k}$ choix.
Ensuite on choisit $(P_2, \dots, P_j)$ de telle sorte que ce soit un $(n-k)$_code : a_{n-k} choix.
Donc au total : $\binom{n}{k} \times a_{n-k}$ choix.

3.(c) Dans un n-code quelconque $(P_1, \dots, P_j)$ le nombre d'éléments de P_1 est un entier compris entre 1 et n. On en déduit :

$$\boxed{a_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a_{n-k}}$$

En posant $k' = n-k$ on obtient :

$$a_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{n-k} a_k = \boxed{\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a_k}$$

puisque $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$

3.(d) Donc :

$$a_3 = a_0 + 3a_1 + 3a_2 = 1 + 3 + 3 \times 3 = \boxed{13}$$

4.(a) $$a_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a_{n-k} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \times (n-k)! \times b_{n-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{k!} b_{n-k} = n! \times \sum_{k=1}^{n} \frac{b_{n-k}}{k!}$$

On divise par $n!$: $\boxed{b_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{b_{n-k}}{k!}}$

4.(b) Pour $n \in \mathbb{N}$ on note H_n le prédicat :

" $\forall x \geq 0, \quad e^x \geq T_n(x)$ "

$\forall x \in \mathbb{R},\ T_0(x) = 1$

et $\forall x \geq 0,\ e^x \geq 1$.

Donc H_0 est vrai.

Soit $n \in \mathbb{N}$ pour lequel H_n est vrai.

T_{n+1} est dérivable sur $\mathbb{R}$ car polynomiale.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ T'_{n+1}(x) = \sum_{k=1}^{n+1} k\frac{x^{k-1}}{k!} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = T_n(x)$$

Donc $\forall x \geq 0,\ T'_{n+1}(x) \leq e^x$ d'après H_n.

On intègre entre 0 et x :

$$\forall x \geq 0,\ T_{n+1}(x) - T_{n+1}(0) \leq e^x - e^0$$

$$\text{ie } T_{n+1}(x) - 1 \leq e^x - 1$$

$$\text{donc } T_{n+1}(x) \leq e^x$$

Ainsi H_{n+1} est vrai.

D'après le principe de récurrence :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \geq 0,\ T_n(x) \leq e^x}$$

4.(c) Pour $n \in \mathbb{N}$ on note H_n le prédicat :

$$\text{"}b_n \leq \frac{1}{(\ln 2)^n}\text{"}$$

On raisonne par récurrence forte.

Pour $n=1$: $b_n = b_1 = a_1 = 1$

et $\frac{1}{(\ln 2)^n} = \frac{1}{(\ln 2)^1} \geq 1$ car $\ln(2) \leq 1$ car $2 \leq e$

donc H_1 est vrai

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ pour lequel $H_n, H_{n-1}, \dots, H_1$ sont vrais.

Comme $n \in \mathbb{N}^*$ on sait d'après 4.(a) que :

$$b_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{b_{n-k+1}}{k!}$$

Comme $k \in [\![1, n+1]\!]$ on a $n-k+1 \in [\![0, n]\!]$.

Or H_0 est vrai car $b_0 = 1 = \frac{1}{(\ln 2)^0}$

et on a supposé $H_1, \dots, H_n$ vrais

Donc pour tout $k \in [\![1, n+1]\!]$, H_{n-k+1} est vrai

ie $b_{n+1-k} \leq \frac{1}{(\ln 2)^{n+1-k}}$

Donc $b_{n+1} \leq \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k!} \times \frac{1}{(\ln 2)^{n+1-k}} = \frac{1}{(\ln 2)^{n+1}} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(\ln 2)^k}{k!}$

Et $\ln(2) \geqslant 0$ donc d'après 4.(b) :

$$1 + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(\ln 2)^k}{k!} \leqslant e^{\ln 2} = 2$$

Donc $b_{n+1} \leq \dfrac{2-1}{(\ln 2)^{n+1}} = \dfrac{1}{(\ln 2)^{n+1}}$.

Par récurrence forte : H_n vrai pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

De plus on a vu que H_0 est vrai.

Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad b_n \leq \dfrac{1}{(\ln 2)^n}}$

5.(a) D'après le cours $x \longmapsto e^x$ est C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Et $x \longmapsto 2$ est polynomiale donc C^∞ sur $\mathbb{R}$.

De plus $x \longmapsto 2 - e^x$ est C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Elle ne s'annule pas sur $\mathbb{R} \setminus \{\ln 2\}$.

Donc $x \longmapsto \dfrac{1}{2-e^x}$ est C^∞ sur $\mathbb{R} \setminus \{\ln 2\}$.

Donc $\boxed{f \text{ est } C^\infty \text{ sur }]-\infty, \ln 2[\,.}$

5.(b) D'après la formule de Leibniz on a pour tout $n \in \mathbb{N}$

et $x \in]-\infty, \ln 2[$:

$$\left(f(x) \times (2-e^x)\right)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times f^{(k)}(x) \times (2-e^x)^{(n-k)}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \times f^{(k)}(x) \times (-e^x) + f^{(n)}(x) \times (2-e^x)$$

$$= 1^{(n)} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$$

5.(c) Pour $n \geq 1$ on a donc :

$$f^{(n)}(x) \times (2 - e^x) = e^x \times \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \times f^{(k)}(x) \quad \text{pour } x < \ln(2)$$

Pour $x = 0$:

$$f^{(n)}(0) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} f^{(k)}(0)$$

5.(d) $f^{(0)}(0) = f(0) = 1 = a_0$

et on a $\forall n \geq 1$, $a_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a_k$.

Donc on montre par récurrence forte :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = f^{(n)}(0)}$$

5.(e) $$\frac{1}{2 - e^x} = \frac{1}{1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \underset{x \to 0}{o}(x^3)}$$

et $$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \underset{t \to 0}{o}(t^3)$$

donc
$$\begin{aligned}\frac{1}{2 - e^x} &= 1 - \left(-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) + \left(-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right)^2 - \left(-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right)^3 + \underset{x \to 0}{o}(x^3) \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^2 + x^3 + \dots + x^3 + \dots + \underset{x \to 0}{o}(x^3) \\ &= 1 + x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{13}{6}x^3 + \underset{x \to 0}{o}(x^3)\end{aligned}$$

Comme f est C^3 au voisinage de 0, la formule de Taylor-Young donne :

$$\frac{f^{(3)}(0)}{6} = \frac{13}{6} \quad \text{donc} \quad f^{(3)}(0) = 13$$

Mais d'après 5.(d) : $a_3 = f^{(3)}(0)$

donc $\boxed{a_3 = 13}$

6.(a) Pour $n \in \mathbb{N}$ on note H_n le prédicat :

" il existe $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall x \in I$, $f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(e^x)}{(2-e^x)^{n+1}}$ "

H_0 est vrai en prenant $P_0(X) \overset{\text{def}}{=} 1$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ pour lequel H_n est vrai.

On a donc $\forall x \in I$, $f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(e^x)}{(2-e^x)^{n+1}}$

On dérive :

$$\forall x \in I, \; f^{(n+1)}(x) = \frac{e^x \times P_n'(e^x) \times (2-e^x)^{n+1} - P_n(e^x) \times (n+1) \times (-e^x) \times (2-e^x)^n}{(2-e^x)^{2n+2}}$$

$$= \frac{e^x \times (2-e^x) \times P_n'(e^x) + (n+1) e^x \times P_n(e^x)}{(2-e^x)^{n+2}}$$

Si on pose $P_{n+1}(X) \overset{\text{def}}{=} X(2-X) \times P_n'(X) + (n+1) \times X \times P_n(X)$

Alors $P_{n+1} \in \mathbb{R}[X]$ et $\forall x \in I$, $f^{(n+1)}(x) = \dfrac{P_{n+1}(e^x)}{(2-e^x)^{n+2}}$

Par récurrence H_n est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$.

6.(b) $P_0 = 1$

$$P_1 = X(2-X)P_0' + XP_0 = X$$
$$P_2 = X(2-X)P_1' + 2XP_1 = X(2-X) + 2X^2 = X^2 + 2X$$
$$P_3 = X(2-X)P_2' + 3XP_2 = X(2-X)(2X+2) + 3X(X^2+2X)$$
$$= X^3 + 8X^2 + 4X$$

6.(c) Pour $n \in \mathbb{N}$ on note H_n le prédicat

"le terme dominant de P_n est X^n"

H_0 est vrai.

Soit $n \in \mathbb{N}$ pour lequel H_n est vrai.

On a donc $P_n(X) = X^n + Q(X)$ où $\deg(Q) \leq n-1$

D'où $P_{n+1} = X(2-X) \cdot (nX^{n-1} + Q') + (n+1)X \cdot (X^n + Q)$

$$= X^{n+1} + \underbrace{2nX^n + X(2-X)Q' + (n+1)XQ}_{\text{de degré } \leq n}$$

Donc le terme dominant de P_{n+1} est X^{n+1}.

Par récurrence : $\boxed{\text{le terme dominant de } P_n \text{ est } X^n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}}$

6.(d) On prouve facilement que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P_n(0) = 0}$

Et $\forall n \in \mathbb{N},\ f^{(n)}(0) = \dfrac{P_n(1)}{1^{n+1}}$ donc $\boxed{P_n(1) = f^{(n)}(0) = a_n}$

7.(a) On a $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P_n(0) = 0$ donc 0 est racine de P_n

donc $X \mid P_n$

donc $\boxed{\exists Q_n \in \mathbb{R}[X],\ P_n(X) = X \times Q_n(X)}$

7.(b) On a pour tout $n \geqslant 1$:

$$P_{n+1}(X) = X(2-X)P_n'(X) + (n+1)XP_n(X)$$

donc $X \times Q_{n+1}(X) = X(2-X) \times \left[Q_n(X) + X \times Q_n'(X)\right] + (n+1)X^2 Q_n(X)$

Comme $X \neq 0_{\mathbb{R}[X]}$:

$$Q_{n+1}(X) = (2+nX) \times Q_n(X) + X(2-X)Q_n'(X)$$

7.(c) On a $u_1 = Q_1(0) = 1$

et $\forall n \geqslant 1,\ u_{n+1} = 2u_n$

Donc $\boxed{\forall n \geqslant 1,\ u_n = 2^{n-1}}$

7.(d) On a donc pour tout $n \geqslant 1$, $P_n = X \times Q_n(X)$ avec $Q_n(0) \neq 0$

donc $\boxed{0 \text{ est racine simple de } P_n.}$