Correction Kosx

Problème

I - 1) Supposons P inversible. Alors $\exists P^{-1} \in M_n(\mathbb{R}) \,/\, \begin{cases} PP^{-1} = I \\ P^{-1}P = I \end{cases}$

Ainsi $\begin{cases} PP^{-1}P = I \times P = P \\ P^{-1}PP^{-1} = I \times P^{-1} = P^{-1} \\ P^{-1}P = PP^{-1} \quad \text{car } PP^{-1} = I = P^{-1}P \end{cases}$

Donc P^{-1} est un pseudo-inverse de P

2) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$, $n \geq 1$. On suppose que A admet un pseudo-inverse U. Soit $P \in Gl_n(\mathbb{R})$.

mq $P^{-1}AP$ admet un pseudo-inverse

Notons $U' = P^{-1}UP$.

On a $P^{-1}AP\,U'\,P^{-1}AP = P^{-1}A\underbrace{PP^{-1}}_{I}U\underbrace{PP^{-1}}_{I}AP$

$= P^{-1}AUAP$

$= P^{-1}AP$ dc le 1er point est vérifié

De +, $U'P^{-1}APU' = P^{-1}U\underbrace{PP^{-1}}_{I}A\underbrace{PP^{-1}}_{I}UP = P^{-1}UAUP$

$= P^{-1}UP = U'$

dc le 2nd point est vérifié

Enfin, $U'P^{-1}AP = P^{-1}UPP^{-1}AP$

$= P^{-1}UAP = P^{-1}AUP$

$= P^{-1}APP^{-1}UP = P^{-1}APU'$ dc le 3e point aussi.

Bilan : $P^{-1}UP$ est un pseudo-inverse de $P^{-1}AP$

II 1) On a $A = \text{mat}_{\mathcal{B}} f$ où $\mathcal{B}$ b.c de $\mathbb{R}^3$

Dc $\text{mat}_{\mathcal{B}}(f(x,y,z)) = A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ 2x+3y+z \\ 3x+5y+2z \end{pmatrix}$. Ms $\mathcal{B}$ b.c de $\mathbb{R}^3$.

Ainsi $f(x,y,z) = (x+y,\ 2x+3y+z,\ 3x+5y+2z)$ $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

2) On a $(x,y,z) \in \text{Ker} f \iff f(x,y,z) = (0,0,0)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ 2x+3y+z=0 \\ 3x+5y+2z=0 \end{cases} \underset{L_3 \leftarrow L_3-3L_1}{\overset{L_2 \leftarrow L_2-2L_1}{\Leftrightarrow}} \begin{cases} x+y=0. \\ y+z=0 \\ \cancel{2y+z=0} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=z \\ y=-z \end{cases}$

Bilan : $\ker f = \{(z,-z,z) \,/\, z \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((1,-1,1))$.

Or $(1,-1,-1) \neq (0,0,0)$ donc $((1,-1,1))$ est libre dc

$\dim \ker f = 1$.

3) On a $\ker f \neq \{0\}$ dc f n'est pas injective donc pas bijective.

Ainsi A n'est pas inversible.

Par le th. du rg, $\dim \text{Im} f + \dim \ker f = 3$

ie $\dim \text{Im} f = 3-1 = 2.$, dc $rg(f) = 2$. Ms $rg(A) = rg(f)$

Bilan : $rg(A) = 2$.

4). Mq (f_1, f_2, f_3) est 1 base de $\mathbb{R}^3$.

On a $\det \text{mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} \overset{C_2 \leftarrow C_2 - C_3}{=} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

$\underset{\text{dev } 3^e \text{ colonne}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2-6 = -4 \neq 0$

Dc $\mathcal{C}$ est 1 base de $\mathbb{R}^3$.

5). On a $\text{Im} f = \text{Vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3)) = \text{Vect}((1,2,3),(1,3,5),(0,1,2))$

Or $(1,3,5) = (1,2,3) + (0,1,2)$

Dc $\text{Im} f = \text{Vect}((1,2,3),(0,1,2)) = \text{Vect}(f_1, f_2)$.

Ms (f_1, f_2) est 1 sous-famille de $\mathcal{C}$ qui est libre (car base)

dc (f_1, f_2) est libre.

Bilan : (f_1, f_2) base de $\text{Im} f$.

De +) Comme $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}(f_3)$ et que (f_1, f_2, f_3) base de $\mathbb{R}^3$ alors

$$\operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3.$$

6) On a $P_{\mathcal{B}\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Donnons l'inverse par le pivot de Gauss.

$P_{\mathcal{B}\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$L_2 \leftrightarrow L_1$. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$
$L_3 \leftarrow L_3 + L_2$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$
$L_3 \leftarrow \frac{L_3}{4}$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$
$L_2 \leftarrow L_2 - L_3$, $L_1 \leftarrow L_1 + L_3$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$
$L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2$ I	$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -5 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

<u>Bilan</u> : $P_{\mathcal{B}\mathcal{E}}^{-1} = P_{\mathcal{E}\mathcal{B}} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -5 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

7) On a $A' = P_{\mathcal{E}\mathcal{B}} A P_{\mathcal{B}\mathcal{E}} = P^{-1}_{\mathcal{B}\mathcal{E}} A P_{\mathcal{B}\mathcal{E}}$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -5 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bilan : $A' = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc $\left|\begin{array}{l} \alpha = 3 \\ \beta = 5 \\ \gamma = 1 \\ \delta = 3 \end{array}\right.$

8) On a $A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ donc $\det A_1 = 9 - 5 = 4 \neq 0$ ie A_1 inversible

De +, $A_1^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ donc $\left|\begin{array}{l} \alpha' = 3/4 \\ \beta' = -5/4 \\ \gamma' = -1/4 \\ \delta' = 3/4. \end{array}\right.$

9) Soit $U' = \begin{pmatrix} 3/4 & -5/4 & 0 \\ -1/4 & 3/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -5 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- On a $A'U'A' = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -5 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A'$

- $U'A'U' = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 3 & -5 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -5 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -5 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -5 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -5 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = U'$.

- Enfin $\left.\begin{array}{l} U'A' = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \text{et } A'U' = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}\right\}$ donc $U'A' = A'U'$.

Bilan : U' est un pseudo inverse de A'.

10) On a $A' = P_{EB} A P_{BE}$ donc $A = P_{BE} A' P_{EB} = P_{EB}^{-1} A' P_{EB}$

Notons $P = P_{EB}$. P est inversible et $A = P^{-1}A'P$.

De +, U' est un pseudo inverse de A', donc d'après I 2), $P^{-1}U'P$ est un pseudo inverse de A

Bilan : $U = P^{-1}U'P$.

11) On a $UA = mat_{\mathcal{B}}(g)$

Donc $mat_{\mathcal{C}}(g) = P_{\mathcal{C}\mathcal{B}} \; UA \; P_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$

$$= P_{\mathcal{B}\mathcal{C}}^{-1} \; U P \; P_{\mathcal{B}\mathcal{C}}^{-1} A P_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$$

$$= P^{-1}UP \; P^{-1}AP = U'A'$$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -5 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

12) Ainsi $mat_{\mathcal{C}}(g^2) = mat_{\mathcal{C}}(g)$ dc $g \circ g = g$. Ms $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ dc

g est 1 projection sur $\operatorname{Im} g$ $/\!/^{t}$ à $\ker g$.

Or $\operatorname{Im} g = \operatorname{Vect}(g(f_1), g(f_2), g(f_3)) = \operatorname{Vect}(f_1, f_2)$. car $\begin{cases} g(f_3) = 0 \\ g(f_1) = f_1 \\ g(f_2) = f_2 \end{cases}$.

et $\ker g = \operatorname{Vect}(f_3)$ car $\begin{cases} g(f_3) = 0 \\ \text{et } \dim \ker g = 1 \end{cases}$ (ǵ au th. du rg).

Dc g est 1 projection sur $\operatorname{Vect}(f_1, f_2) = \operatorname{Im} g$, $/\!/^{t}$ à $\ker g = \operatorname{Vect}(f_3)$
$= \ker g$

III 1). On a $AUAU' = AU'$ car $AUA = A$.

et $AUAU' = (AU)(AU') = UA(U'A) = U(AU'A) = UA$

Dc $AU' = UA$

2) Mq $U = U'$.

$$\text{On a } U = UAU \underset{\substack{\uparrow \\ UA = AU'}}{=} AU'U \underset{\substack{\uparrow \\ \text{car } AU' = U'A}}{=} U'AU \overset{\substack{\text{car } AU = UA \\ \downarrow}}{=} U'UA \underset{\substack{\uparrow \\ \text{car } UA = AU'}}{=} U'AU' = U'.$$

Finalement $U = U'$

Partie IV

1) a) On a $(AU)^2 = \underbrace{AUA}_{=A}U = AU$ car U pseudo-inverse de A.

Donc $(f\circ h)^2 = f\circ h$. Or $f\circ h \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ donc $f\circ h$ est 1 projection.

b). mq $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker}(f\circ h)$.

* Soit $x \in \operatorname{Ker} f$. Alors $f(x)=0$. Or $f\circ h = h\circ f$ car $AU = UA$.
donc $f\circ h(x) = h\circ f(x) = h(0) = 0$ car h linéaire. Donc $x \in \operatorname{Ker}(f\circ h)$.

Ainsi $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker}(f\circ h)$.

* Soit $x \in \operatorname{Ker} f\circ h$. Alors $f\circ h(x) = 0$ Donc $h\circ f(x) = 0$ car $UA = AU$.
Donc $f(h\circ f(x)) = f(0) = 0$ car f linéaire, Or $f\circ h\circ f = f$ car $AUA = A$ donc
$f(x) = 0$ et ainsi $x \in \operatorname{Ker} f$. Donc $\operatorname{Ker}(f\circ h) \subset \operatorname{Ker} f$.

Bilan : $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker}(f\circ h)$.

. mq $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im}(f\circ h)$. Soit $x \in \operatorname{Im} f$. $\exists a \in \mathbb{R}^n \mid x = f(a)$
Or $f(a) = f\circ h\circ f(a)$ car $A = AUA$ donc $f = f\circ h\circ f$.
ie $x = f\circ h\circ f(a) = f\circ h(f(a)) \in \operatorname{Im}(f\circ h)$. et ainsi $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Im}(f\circ h)$

. Soit $x \in \operatorname{Im}(f\circ h)$. $\exists a \in \mathbb{R}^n \mid x = f\circ h(a) = f(h(a)) \in \operatorname{Im} f$.
Donc $\operatorname{Im}(f\circ h) \subset \operatorname{Im} f$.

Bilan. $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im}(f\circ h)$.

Remarque : on pouvait aussi faire 1 inclusion et utiliser le th. du rg.

c). Comme $f\circ h$ est 1 projection alors $\operatorname{Ker}(f\circ h) \oplus \operatorname{Im}(f\circ h) = \mathbb{R}^n$.
Donc d'après b), $\operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f = \mathbb{R}^n$.

2a). Si $\operatorname{Ker} f = \{0\}$ alors f bijective car $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Donc A inversible.
Donc d'après I-1), A admet un pseudo-inverse.

2b) Si $\operatorname{Im} f = \{0\}$ alors $f(x) = 0$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$ donc $A = 0$. Donc A admet
comme pseudo-inverse $U = 0$

3). On a donc A admet 1 pseudo-inverse $\Leftrightarrow$ $\operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f = \mathbb{R}^n$.

en effet, $\Rightarrow$ est montré ds IV, 1),

et $\Leftarrow$ ds IV 2).

Exercice 2   Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1) On a $\Delta_{n+2} = \begin{vmatrix} a & b & & 0 \\ c & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b \\ 0 & & c & a \end{vmatrix}_{(n+2)}$

Effectuons un développement suivant la $1^{\text{ère}}$ colonne.

$$\Delta_{n+2} = a\,\Delta_{n+1} - c \begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 \\ c & a & b & 0 \cdots & 0 \\ 0 & c & a & b\ 0 \cdots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & \ddots & b \\ 0 & & & c & a \end{vmatrix}_{(n+2)}$$

$$= a\Delta_{n+1} - c \begin{vmatrix} b & 0 & \cdots & & 0 \\ c & a & b & 0 \cdots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & b \\ 0 & & & c & a \end{vmatrix}_{(n+1)}$$

$$\underset{\text{dev } 1^{\text{ère}} \text{ ligne}}{=} a\,\Delta_{n+1} - cb\,\Delta_n.$$

Bilan : $\Delta_{n+2} = a\Delta_{n+1} - cb\Delta_n$.

2) mq $\forall n \geq 1$, $\Delta_n = \dfrac{(n+1)a^n}{2^n}$ si $a^2 = 4bc$

Equation caractéristique : $r^2 = ar - cb$. ie $r^2 - ar + cb = 0$ $\Delta = a^2 - 4cb = 0$

donc une unique solution $r_0 = \frac{a}{2}$.

Ainsi $\Delta_n = (An + B)\, r_0^n$ où $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

Or $\begin{cases} \Delta_1 = |a| = a. \\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a & b \\ c & a \end{vmatrix} = a^2 - bc = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3}{4}a^2. \end{cases}$

ie : $\begin{cases} (A+B)\, r_0 = a \\ (2A + B)\, r_0^2 = \frac{3}{4}a^2 \end{cases}$ $\underset{L_2 \leftarrow L_2 - 2r_0 L_1}{\Leftrightarrow}$ $\begin{cases} Ar_0 + Br_0 = a \\ (Br_0^2 - 2Br_0^2) = \frac{3}{4}a^2 - 2a \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} Ar_0 + Br_0 = a \\ -Br_0^2 = \frac{3}{4}a^2 - a^2 = -\frac{1}{4}a^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} Ar_0 + Br_0 = a. \\ \frac{a^2}{4} B = \frac{a^2}{4}. \end{cases}$

* si $a = 0$ alors $r_0 = 0$ donc $\Delta_n = 0$.

et aussi $\Delta_n = \dfrac{(n+1)a^n}{2^n}$ (car $a = 0$)

* si $a \neq 0$ alors $B = 1$ donc $A r_0 + B r_0 = a$

$\Leftrightarrow A r_0 + r_0 = a$

$\Leftrightarrow A r_0 = a - r_0 = a/2$

$\Leftrightarrow A \dfrac{a}{2} = a/2$. $\Leftrightarrow A = 1$.

Bilan : $\Delta_n = (n+1)\left(\dfrac{a}{2}\right)^n$.

Conclusion : dans tous les cas, $\Delta_n = (n+1)\left(\dfrac{a}{2}\right)^n \quad \forall n \geq 1$.

remarque : on aurait pu faire par récurrence double.