Correction du DM

Exercice 1

Partie A

1. Par exemple O_n, I_n et B.

2. Par hypothèse on a $MB = BM$ et $M'B = BM'$.

Donc
$$(\lambda M + \mu M')B = \lambda MB + \mu M'B$$
$$= \lambda BM + \mu BM'$$
$$= B(\lambda M + \mu M')$$

Ainsi $\lambda M + \mu M' \in \mathcal{E}(B)$.

3. On suppose que $MB = BM$ et $M'B = BM'$.

Alors $MM'B = M(M'B) = M(BM') = MBM' = (MB)M' = (BM)M'$
$= BMM'$

grâce à l'associativité du produit matriciel.

Ainsi $MM' \in \mathcal{E}(B)$.

4. Pour $p \in \mathbb{N}$ on note H_p le prédicat :

" $\forall (a_0, \dots, a_p) \in \mathbb{R}^{p+1}$, $\sum_{k=0}^{p} a_k B^k \in \mathcal{E}(B)$ "

Pour $p = 0$: Si $a_0 \in \mathbb{R}$ alors

$a_0 B \times B = a_0 B^2 = B \times (a_0 B)$ donc $a_0 B \in \mathcal{E}(B)$.

Ainsi H_0 est vrai.

Hérédité : Soit $p \in \mathbb{N}$ fixé pour lequel H_p est vrai.

On se donne $(a_0, \dots, a_p, a_{p+1}) \in \mathbb{R}^{p+2}$.

Alors $\sum_{k=0}^{p+1} a_k B^k = \left(\sum_{k=0}^{p} a_k B^k\right) + a_{p+1} B^{p+1}$

Comme $(0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}^{p+1}$ on sait d'après H_p que :

$$B^p = 0.B^0 + 0.B^1 + \dots + 0.B^{p-1} + 1.B^p \in \mathcal{E}(B)$$

Mais on a aussi $B \in \mathcal{E}(B)$ donc d'après la question 3.

on a $B^{p+1} = B \times B^p \in \mathcal{E}(B)$.

D'autre part H_p donne aussi que $\sum_{k=0}^{p} a_k B^k \in \mathcal{E}(B)$

D'après 2. on peut conclure que

$$\left(\sum_{k=0}^{p} a_k . B^k\right) + a_{p+1} . B^{p+1} \in \mathcal{E}(B)$$

ie $\sum_{k=0}^{p+1} a_k . B^k \in \mathcal{E}(B)$.

Donc H_{p+1} est vrai.

Ccl Par récurrence on peut conclure que H_p est vrai pour tout $p \in \mathbb{N}$.

5. On suppose que M est inversible et que $MB = BM$

En multipliant à gauche et à droite par M^{-1} on a donc :

$$M^{-1} M B M^{-1} = M^{-1} B M M^{-1} \quad \text{ie} \quad B M^{-1} = M^{-1} B$$

donc $M^{-1} \in \mathcal{E}(B)$

6. On pose $B=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$

Alors ${}^tBB=\begin{pmatrix}1&3\\2&4\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10&14\\14&20\end{pmatrix}$

et $B\,{}^tB=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&3\\2&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&11\\11&25\end{pmatrix}$

Donc ${}^tBB\neq B\,{}^tB$ donc ${}^tB\notin\mathcal{E}(B)$

Donc $\mathcal{E}(B)$ n'est pas stable par transposition (en général)

Ce sera vrai par exemple si on suppose que ${}^tB=B$

ie que B est symétrique.

En effet dans ce cas si $M\in\mathcal{E}(B)$

alors $MB=BM$

donc ${}^t(MB)={}^t(BM)$

donc ${}^tB\,{}^tM={}^tM\,{}^tB$

et comme ${}^tB=B$: $B\,{}^tM={}^tMB$

donc ${}^tM\in\mathcal{E}(B)$.

Partie B

7. On utilise la méthode du système linéaire.

Soient $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et $Y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Donc :

$$PX = Y \iff \begin{cases} \boxed{-2x_1} + x_3 = y_1 \\ x_1 + x_2 = y_2 \\ x_1 - x_3 = y_3 \end{cases} \iff \begin{cases} \boxed{-2x_1} + x_3 = y_1 \\ \boxed{2x_2} + x_3 = y_1 + 2y_2 & L_2 \leftarrow 2L_2 + L_1 \\ \boxed{-x_3} = y_1 + 2y_3 & L_3 \leftarrow 2L_3 + L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_1 = -y_1 - y_3 \\ x_2 = y_1 + y_2 + y_3 \\ x_3 = -y_1 - 2y_3 \end{cases}$$

donc <u>P est inversible</u> et $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

<u>8.</u> On trouve $D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

<u>9.</u> $M \in \mathcal{E}(A) \iff AM = MA$
$\iff P^{-1}AMP = P^{-1}MAP$
$\iff P^{-1}AP \times P^{-1}MP = P^{-1}MP \times P^{-1}AP$
$\iff D \times P^{-1}MP = P^{-1}MP \times D$
$\iff P^{-1}MP \in \mathcal{E}(D)$

<u>10.</u> <u>Analyse</u> Soit $N = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{pmatrix} \in \mathcal{E}(D)$.

Alors $ND = DM$ donne $\begin{cases} -3x_1 = -3x_1 \\ -3x_4 = x_4 \\ -3x_7 = x_7 \\ x_2 = -3x_2 \\ x_5 = x_5 \\ x_8 = x_8 \\ x_3 = -3x_3 \\ x_6 = x_6 \\ x_9 = x_9 \end{cases} \iff \begin{cases} x_4 = 0 \\ x_7 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$

donc $N = \begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ 0 & x_5 & x_6 \\ 0 & x_8 & x_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & d & e \end{pmatrix}$ en posant $\begin{cases} a = x_1 \\ b = x_5 \\ c = x_6 \\ d = x_8 \\ e = x_9 \end{cases}$

<u>Synthèse</u> On pose $N = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & d & e \end{pmatrix}$ où $(a,b,c,d,e) \in \mathbb{R}^5$.

Alors $DN = \begin{pmatrix} -3a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & d & e \end{pmatrix}$

et $ND = \begin{pmatrix} -3a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & d & e \end{pmatrix}$ donc $DN = ND$

donc $N \in \mathcal{E}(D)$.

<u>Conclusion</u>

$$\mathcal{E}(D) = \left\{ N = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & d & e \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) ; \ (a,b,c,d,e) \in \mathbb{R}^5 \right\}$$

<u>11.</u> On note $(E_{i,j})_{1 \leq i,j \leq 3}$ les matrices élémentaires de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

Si $(a,b,c,d,e) \in \mathbb{R}^5$:

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & d & e \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + e \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= aE_{1,1} + bE_{2,2} + cE_{2,3} + dE_{3,2} + eE_{3,3}$$

<u>Analyse</u>: Soit $M \in \mathcal{E}(A)$.

Alors $N \overset{\text{def}}{=} P^{-1}MP \in \mathcal{E}(D)$

donc il existe $(a,b,c,d,e) \in \mathbb{R}^5$ tel que

$$N = aE_{1,1} + bE_{2,2} + cE_{2,3} + dE_{3,2} + eE_{3,3}$$

Alors:

$$M = PNP^{-1} = aPE_{1,1}P^{-1} + bPE_{2,2}P^{-1} + cPE_{2,3}P^{-1} + dPE_{3,2}P^{-1} + ePE_{3,3}P^{-1}$$

$$= a\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{\overset{\text{def}}{=} M_1} + b\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\overset{\text{def}}{=} M_2} + c\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\overset{\text{def}}{=} M_3} + d\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}}_{\overset{\text{def}}{=} M_4} + e\underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{\overset{\text{def}}{=} M_5}$$

<u>Synthèse</u> Soit $(a,b,c,d,e) \in \mathbb{R}^5$ et $M \overset{\text{def}}{=} aM_1 + bM_2 + cM_3 + dM_4 + eM_5$

On vérifie que M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 sont dans $\mathcal{E}(A)$

D'après la question 2. on en déduit que $M \in \mathcal{E}(A)$.

<u>Conclusion</u>

$$\mathcal{E}(A) = \{ M = aM_1 + bM_2 + cM_3 + dM_4 + eM_5 ;\ (a,b,c,d,e) \in \mathbb{R}^5 \}$$

Exercice 2

1. sin est strictement croissante sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

donc $\sin\left(\left]0,\frac{\pi}{2}\right]\right) = \left]\sin(0), \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] = \left]0,1\right] \subseteq \left]0,\frac{\pi}{2}\right]$

Ainsi l'intervalle $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$ est stable par la fonction sin.

On pose $\forall x \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right]$, $\theta(x) = x - \sin(x)$

θ est dérivable sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$ et :

$\forall x \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right]$, $\theta'(x) = 1 - \cos(x) < 0$

Donc θ est strictement décroissante sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$ et

comme $\lim\limits_{x \to 0^+} \theta(x) = 0$ on a $\forall x \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right]$, $\theta(x) < 0$

Donc $\boxed{\forall x \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right], \ \sin(x) < x}$

2. Comme l'intervalle $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$ est stable par sin et

comme $u_0 \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right]$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie

et $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \ u_n \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right]}$.

On a donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sin(u_n) < u_n$

i.e. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} < u_n$.

Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

3. (u_n) est décroissante et minorée par 0 donc elle converge vers une limite $l \geqslant 0$.

On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n \leqslant \frac{\pi}{2}$ donc $0 \leqslant l \leqslant \frac{\pi}{2}$.

De plus $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sin(u_n)$

donc lorsque $n \to +\infty$: $l = \sin(l)$ par continuité de la fonction sin en l.

Comme $l \in [0, \frac{\pi}{2}]$ et $\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}]$, $\sin(x) < x$

on a $\boxed{l = 0}$

4. On pose :

$\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $f(x) = \sin(x) - \left(x - \frac{x^3}{6}\right)$

et $g(x) = \sin(x) - \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\right)$

f et g sont dérivables sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et :

$\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $f'(x) = \cos(x) - 1 + \frac{x^2}{2}$

et $g'(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}$

f' et g' sont dérivables sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et :

$\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $f''(x) = -\sin(x) + x$

et $g''(x) = -\sin(x) + x - \frac{x^3}{6} = -f(x)$

D'après la question 1. on a :

$$\forall x \in [0, \tfrac{\pi}{2}],\ f''(x) \geq 0$$

x	0		$\pi/2$
f'	0	$\nearrow$	
f	0	$\nearrow$	

Donc $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}],\ f(x) \geq 0$ ie $\boxed{\sin(x) \geqslant x - \frac{x^3}{6}}$

Donc $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}],\ g''(x) \leqslant 0$.

x	0		$\pi/2$
g'	0	$\searrow$	
g	0	$\searrow$	

Donc $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}],\ g(x) \leqslant 0$ ie $\boxed{\sin(x) \leqslant x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}}$

5. On a donc pour $x \in]0, \frac{\pi}{2}]$:

$$\underbrace{\frac{1}{6} - \frac{x^2}{120}}_{\xrightarrow[x \to 0^+]{} 1/6} \leqslant \frac{x - \sin(x)}{x^3} \leqslant \underbrace{\frac{1}{6}}_{\xrightarrow[x \to 0^+]{} \frac{1}{6}}$$

donc d'après le th des gendarmes : $\boxed{\frac{x - \sin(x)}{x^3} \xrightarrow[x \to 0^+]{} \frac{1}{6}}$

$$\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - \sin^2(x)}{x^2 \times \sin^2(x)} = \frac{x - \sin(x)}{x^3} \times \frac{1 + \frac{\sin(x)}{x}}{\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2}$$

$$\xrightarrow[x \to 0^+]{} \frac{1}{6} \times \frac{1+1}{1^2} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

6. Comme $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ on a par composition de limites

$$\frac{1}{\sin^2(u_n)} - \frac{1}{u_n^2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{1}{3}$$

donc $\boxed{\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{1}{3}}$

7. D'après le th de Cesaro on a donc :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{u_{k+1}^2} - \frac{1}{u_k^2} \right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{1}{3}$$

Par télescopage : $\frac{1}{n}\left(\frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{u_0^2}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{1}{3}$

mais $\frac{1}{n} \times \frac{1}{u_0^2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

donc par somme de limites :

$$\frac{1}{n} \times \frac{1}{u_n^2} = \frac{1}{n} \times \left(\frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{u_0^2}\right) + \frac{1}{n} \times \frac{1}{u_0^2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{1}{3} + 0 = \frac{1}{3}$$

Donc $nu_n^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 3$

donc $nu_n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} 3$

donc $u_n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{3}{n}$

donc $\sqrt{u_n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{3}{n}}$

Mais $\sqrt{u_n^2} = |u_n| = u_n$ car $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$

Donc $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{3}{n}}}$

EXERCICE 3

1. (u_n) arithmétique. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_8 - 3(n-8) = 34 - 3n$

2. (u_n) géométrique. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_5 \cdot (\sqrt{2})^{n-5} = 2^{(n-1)/2} = (\sqrt{2})^{n-1}$

3. (u_n) arithmético-géométrique point fixe $l = -1$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, si $v_n = u_n + 1$ alors $v_{n+1} = 2v_n$

donc (v_n) est géométrique.

$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = 2^{n-11} \cdot v_{11} = 2^{n-11} \cdot 31$

donc $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2^{n-11} \times 31 - 1$

4. Même démarche qu'au 3. et on trouve $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 3 \times (-1)^{n+1} + 1$

5. Par récurrence immédiate : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$.

Si on pose $v_n = \ln(u_n)$ alors $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = 1 + \frac{1}{2} v_n$

donc (v_n) est arithmético-géométrique.

On trouve $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \frac{1}{2^n} \ln(u_0) + 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$

donc $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0^{1/2^n} \times e^{2 - 1/2^{n-1}}$

6. (u_n) est géométrique. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (-1)^{n+1} = (-1)^{n-1}$

7. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = (-1)^{n+1} \cdot u_{n+1} = (-1)^{n+1} \times (-1)^n \cdot u_n = -u_n$

donc (u_n) suite récurrente linéaire d'ordre 2.

Équation caractéristique : $z^2 = -1$ donc $\Delta < 0$ et $z = \pm i = e^{\pm i\pi/2}$

Donc $\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2;\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \left(\lambda \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) + \mu \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right) \times 1^n$

Avec $u_0 = 1$ et $u_1 = (-1)^0 u_0 = 1$ on trouve :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{2}.\cos\left(n\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$

<u>8.</u> De même $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \dfrac{1}{4}\left[(-1)^n + 3^{n+1}\right]$

<u>9.</u> De même $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (1-n)2^n$

<u>10.</u> De même $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \cos\left(n\frac{\pi}{3}\right) + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)$

<u>11.</u> Cette fois l'équation caractéristique est $z^2 - z + 5 = 0$

$\Delta = -16 < 0$ et $z = 1 \pm 2i = \sqrt{5}e^{i\alpha}$

où $\alpha \in [0, 2\pi[$ vérifie $\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \\ \sin\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{5}} \end{cases}$

Comme $\cos\alpha > 0$ et $\sin\alpha > 0$ on a $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

et $\alpha = \arccos\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right) = \arcsin\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$

On trouve alors $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n = \lambda . 5^{n/2} . \sin\left(n.\arccos\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)\right)$

où λ qcq dans $\mathbb{R}$ (car u_1 inconnu).

<u>12.</u> Suite de Fibonacci initialisée à $u_0 = u_1 = 1$.

On trouve $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \dfrac{5+\sqrt{5}}{10} \times \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \dfrac{5-\sqrt{5}}{10} \times \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$

<u>13.</u> Par récurrence immédiate $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$ donc $v_n = \ln(u_n)$ existe.

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+2} - 4v_{n+1} + 4v_n = 0$ et $v_0 = 0, v_1 = 4$

On trouve $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = n2^{n+1}$

puis $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = e^{n2^{n+1}}$

<u>14.</u> Si on pose $v_n = \frac{u_n}{n!}$ alors $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = v_n + 1$

et $v_0 = u_0 = 1$

donc $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = n+1$ puis $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (n+1)!$