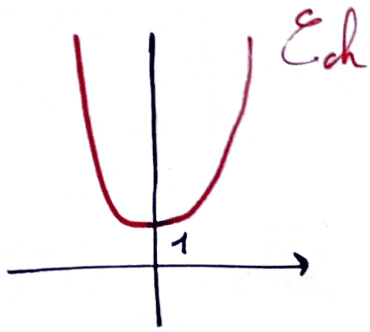
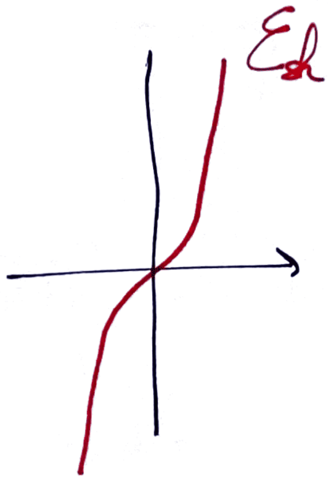
Correction DM4

1.





2. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$ch^2 x - sh^2 x = (ch\, x - sh\, x)(ch\, x + sh\, x) = e^{-x} \times e^{x} = \boxed{1}$$

$$ch\, x - sh\, x = \frac{e^{x}+e^{-x}}{2} - \frac{e^{x}-e^{-x}}{2} = \boxed{e^{-x}}$$

3. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned}(ch\, x + sh\, x)(ch\, y + sh\, y) &= e^{x} \times e^{y} \\ &= e^{x+y} \\ &= \boxed{ch(x+y) + sh(x+y)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(ch\, x - sh\, x)(ch\, y - sh\, y) &= e^{-x} \times e^{-y} \\ &= e^{-(x+y)} \\ &= \boxed{ch(x+y) - sh(x+y)}\end{aligned}$$

Donc en additionnant en soustrayant ces formules : 2

$$2ch(x+y) = (ch x + sh x)(ch y + sh y) + (ch x - sh x)(ch y - sh y)$$

$$= ch(x).ch(y) + \cancel{ch(x).sh(y)} + \cancel{sh(x).ch(y)} + sh(x).sh(y)$$

$$+ ch(x).ch(y) - \cancel{ch(x).sh(y)} - \cancel{sh(x).ch(y)} + sh(x).sh(y)$$

$$= 2.ch(x).ch(y) + 2.sh(x).sh(y)$$

donc $\boxed{ch(x+y) = ch(x).ch(y) + sh(x).sh(y)}$

Et de même : $\boxed{sh(x+y) = sh(x).ch(y) + ch(x).sh(y)}$

4. th est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $th'(x) = \dfrac{sh'(x).ch(x) - sh(x).ch'(x)}{ch^2(x)}$

$$= \frac{ch^2(x) - sh^2(x)}{ch^2(x)} = \boxed{\frac{1}{ch^2(x)} = 1 - th^2(x)}$$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $th'(x) > 0$

Donc th strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Or a $\forall x \in \mathbb{R}$, $th(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

On a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ th(x) = \frac{\cancel{e^{x}}}{\cancel{e^{x}}} \times \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$$

$$\text{donc } \lim_{x \to +\infty} th(x) = \frac{1-0}{1+0} = \boxed{1}$$

$$\text{Et } \forall x \in \mathbb{R},\ th(x) = \frac{\cancel{e^{x}}}{\cancel{e^{x}}} \times \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

$$\text{donc } \lim_{x \to -\infty} th(x) = \frac{0-1}{0+1} = \boxed{-1}$$

On a donc le tableau de variations :

$$\begin{array}{c|ccc} x & -\infty & & +\infty \\ \hline & & & 1 \\ th & & \nearrow & \\ & -1 & & \end{array}$$

th est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc elle bijective de $\mathbb{R}$ vers $]-1, 1[$

5. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

$$th(x+y) = \frac{sh(x+y)}{ch(x+y)} = \frac{sh(x).ch(y) + ch(x).sh(y)}{ch(x).ch(y) + sh(x).sh(y)}$$

On divise en haut et en bas par $ch(x).ch(y)$:

$$\boxed{th(x+y) = \frac{th(x) + th(y)}{1 + th(x).th(y)}}$$

6. Soit $y \in]-1,1[$. On veut montrer que $argth(-y) = -argth(y)$

On pose $\begin{cases} x = argth(y) \\ x' = argth(-y) \end{cases}$

On a $th(x) = y$ et $th(x') = -y$

Donc $th(x') = -th(x) = th(-x)$ car th impaire.

Comme th bijective : $x' = -x$

ie $argth(-y) = -argth(y)$

Donc argth est impaire sur $]-1,1[$.

La fonction th est dérivable et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée $th' = \frac{1}{ch^2}$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

On sait donc que argth est dérivable sur $th(\mathbb{R}) =]-1,1[$

et que $\forall y \in]-1,1[$, $argth'(y) = \frac{1}{th'(argth(y))} = \frac{1}{1 - th^2(argth(y))}$

$$= \boxed{\frac{1}{1-y^2}}$$

7.(a) Soit $x \in]-1,1[$. On pose $y = \operatorname{argth}(x)$.

On a $x = \operatorname{th}(y) = \dfrac{e^{2y}-1}{e^{2y}+1}$

donc $x \times (e^{2y}+1) = e^{2y} - 1$

donc $e^{2y} \times (x-1) = -x-1$

donc $e^{2y} = -\dfrac{x+1}{x-1} = \boxed{\dfrac{1+x}{1-x}}$

7.(b) Donc $y = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$

Ainsi $\boxed{\forall x \in]-1,1[,\ \operatorname{argth}(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)}$

On retrouve que argth est dérivable sur $]-1,1[$ comme quotient et composée de fonctions dérivables.

$$\forall x \in]-1,1[,\ \operatorname{argth}'(x) = \frac{1}{2}\,\frac{\frac{1-x-(-1)(1+x)}{(1-x)^2}}{\frac{1+x}{1-x}}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{2}{(1-x)(1+x)} = \boxed{\frac{1}{1-x^2}}$$

8.(a) $\dfrac{\operatorname{ch}x - 1}{\operatorname{ch}x + 1}$ est défini sur $\mathbb{R}$ car $\forall x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{ch}x \geq 1$.

$\sqrt{\dfrac{\operatorname{ch}x - 1}{\operatorname{ch}x + 1}}$ est défini sur $\mathbb{R}$ car $\forall x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{\operatorname{ch}x - 1}{\operatorname{ch}x + 1} \geq 0$

argth est définie sur $]-1, 1[$.

Donc $x \in \mathcal{D}_f \iff \sqrt{\dfrac{\operatorname{ch}x - 1}{\operatorname{ch}x + 1}} \in]-1, 1[$

$\iff \dfrac{\operatorname{ch}x - 1}{\operatorname{ch}x + 1} \in [0, 1[$

Or $\forall x \in \mathbb{R}$, $0 \leq \operatorname{ch}x - 1 < \operatorname{ch}x + 1$

donc $0 \leq \dfrac{\operatorname{ch}x - 1}{\operatorname{ch}x + 1} < 1$

Donc $\boxed{\mathcal{D}_f = \mathbb{R}.}$

8.(b) On pose $y = \operatorname{ch}x$.

$$f(x) = \operatorname{argth}\left(\sqrt{\frac{y-1}{y+1}}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1 + \sqrt{\frac{y-1}{y+1}}}{1 - \sqrt{\frac{y-1}{y+1}}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{y+1} + \sqrt{y-1}}{\sqrt{y+1} - \sqrt{y-1}}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\left(\sqrt{y+1} + \sqrt{y-1}\right)^2}{(y+1) - (y-1)}\right)$$

Donc $f(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{(y+1)+(y-1)+2\sqrt{y^2-1}}{2}\right)$

$$= \boxed{\frac{1}{2} \ln\left(y+\sqrt{y^2-1}\right)}$$

8.(c) $y+\sqrt{y^2-1} = \operatorname{ch} x + \sqrt{\operatorname{ch}^2 x - 1}$

$$= \operatorname{ch} x + \sqrt{\operatorname{sh}^2 x}$$

$$= \operatorname{ch} x + |\operatorname{sh} x|$$

$$= \begin{cases} \operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x & \text{si } x \geq 0 \\ \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} e^{x} & \text{si } x \geq 0 \\ e^{-x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$= e^{|x|}$$

Donc $f(x) = \frac{1}{2} \ln\left(e^{|x|}\right) = \boxed{\frac{|x|}{2}}$

9. Soit $(x, y) \in]-1, 1[$.

On a donc $-1 < x < 1$ et $-1 < y < 1$

donc $0 \leqslant |x| < 1$ et $0 \leqslant |y| < 1$

Par produit d'inégalités dont tous les membres sont positifs :

$$0 \leqslant |x| \times |y| < 1 \quad \text{ie} \quad 0 \leqslant |xy| < 1$$

$$\text{ie} \quad -1 < xy < 1$$

Donc $0 < 1 + xy < 2$

Alors
$$(x+y) - (1+xy) = x - 1 + y(1-x)$$
$$= (1-x)(y-1) < 0$$

donc $x+y < 1 + xy$

Comme $1 + xy > 0$: $\boxed{\dfrac{x+y}{1+xy} < 1}$

Et
$$x+y + (1+xy) = x + 1 + y(1+x)$$
$$= (1+x)(1+y) > 0$$

donc $x+y > -(1+xy)$

Comme $1 + xy > 0$: $\boxed{\dfrac{x+y}{1+xy} > -1}$

Donc $\dfrac{x+y}{1+xy} \in]-1, 1[$.

$$\operatorname{argth}\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\frac{x+y}{1+xy}}{1-\frac{x+y}{1+xy}}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+xy+x+y}{1+xy-x-y}\right)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{(1+x)(1+y)}{(1-x)(1-y)}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)=\boxed{\operatorname{argth}(x)+\operatorname{argth}(y)}$$

10.(a) Soit $k\in\mathbb{N}^*$.

$$\operatorname{argth}\left(\frac{1}{k+1}\right)-\operatorname{argth}\left(\frac{1}{k+2}\right)=\operatorname{argth}\left(\frac{1}{k+1}\right)+\operatorname{argth}\left(\frac{-1}{k+2}\right)$$

$$=\operatorname{argth}\left(\frac{\frac{1}{k+1}+\frac{-1}{k+2}}{1+\frac{-1}{(k+1)(k+2)}}\right)$$

$$=\operatorname{argth}\left(\frac{k+2-(k+1)}{(k+1)(k+2)-1}\right)$$

$$=\boxed{\operatorname{argth}\left(\frac{1}{k^2+3k+1}\right)}$$

10.(b) $$S_n=\sum_{k=1}^{n}\operatorname{argth}\left(\frac{1}{k^2+3k+1}\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(\operatorname{argth}\frac{1}{k+1}-\operatorname{argth}\frac{1}{k+2}\right)$$

$$=\operatorname{argth}(1/2)-\operatorname{argth}\left(\frac{1}{n+2}\right)$$

$$\operatorname{argth}\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}\ln 3$$

Donc $\boxed{S_n = \frac{1}{2}\ln 3 - \operatorname{argth}\left(\frac{1}{n+2}\right)}$

10.(c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+2} = 0$ et $\operatorname{argth}(0) = 0$

puisque $\operatorname{th}(0) = 0$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \operatorname{argth}\left(\frac{1}{n+2}\right) = \operatorname{argth}(0) = 0$

car argth continue en 0

Donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{2}\ln 3}$