EXERCICE

1

1.(a) $S_{n,0} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k 1^{n-k} \underset{\uparrow}{=} (-1+1)^n = 0^n$

formule du binôme

donc si $n \in \mathbb{N}^*$: $\boxed{S_{n,0} = 0}$

1.(b) $S_{0,0} = 0^0 = \boxed{1}$

2.(a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} x^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-x)^k 1^{n-k} = \boxed{(1-x)^n}$$

2.(b) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (car polynomiale) et

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \boxed{\sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} k x^{k-1} = -n(1-x)^{n-1}}$$

2.(c) $S_{1,1} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} k$

Or $\forall n \geq 1$, $f'(1) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} k = -n \cdot 0^{n-1}$

donc $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} k = -n\, 0^{n-1}$

on ajoute le terme pour $k=0$ et il est nul donc cela ne change pas la formule

Pour $n=1$: $\boxed{S_{1,1}=-1}$

Pour $n\geqslant 2$: $\boxed{S_{n,1}=0}$

3.(a) On a :

$$n\left(S_{n,p}-S_{n-1,p}\right)=n\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}k^p-\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{n-1}{k}k^p\right)$$

$$=n\left((-1)^n\binom{n}{n}n^p+\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\left[\binom{n}{k}-\binom{n-1}{k}\right]k^p\right)$$

$$=n\left((-1)^n n^p+\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{n-1}{k-1}k^p\right)$$

formule de Pascal

$$=(-1)^n n^{p+1}+\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k n\binom{n-1}{k-1}k^p$$

d'après la formule du pion : $k\binom{n}{k}=n\binom{n-1}{k-1}$

Donc $n\left(S_{n,p}-S_{n-1,p}\right)=(-1)^n n^{p+1}+\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{n}{k}k^{p+1}$

$$=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}k^{p+1}=\boxed{S_{n,p+1}}$$

<u>3. (b)</u> Pour $p \in \mathbb{N}$ on note $P(p)$ le prédicat :

"$\forall n \geq p, \quad S_{n,p} = 0$"

<u>Initialisation</u> si $p = 0$ on a vu au 1.(a) que $\forall n \geq 0, \ S_{n,0} = 0$

Donc $P(0)$ est vrai.

<u>Hérédité</u> Soit $p \in \mathbb{N}$ pour lequel $P(p)$ est vrai.

Montrons que $P(p+1)$ est vrai.

Soit $n \geq p+1$.

On a $S_{n,p+1} = n.\left(S_{n,p} - S_{n-1,p}\right)$

Comme $n \geq p+1$ on a $n \geq p$ et $n-1 \geq p$

donc $P(p)$ donne : $S_{n,p} = S_{n-1,p} = 0$

Donc $S_{n,p+1} = 0$

Ainsi $P(p+1)$ est vrai.

<u>Conclusion</u> Par récurrence $P(p)$ est vrai pour tout $p \in \mathbb{N}$.

EXERCICE

1.

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
0 & & 1 & & 2 & & 3 & & 4 & & 5 & & 6 & & 7 \\
& 1 & & 3 & & 5 & & 7 & & 9 & & 11 & & 13 & \\
& & 4 & & 8 & & 12 & & 16 & & 20 & & 24 & & \\
& & & 12 & & 20 & & 28 & & 36 & & 44 & & & \\
& & & & 32 & & 48 & & 64 & & 80 & & & & \\
& & & & & 80 & & 112 & & 144 & & & & & \\
& & & & & & 192 & & 256 & & & & & & \\
& & & & & & & 448 & & & & & & &
\end{array}
$$

2. Vu en TD. On trouve $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$

(même si $n=0$).

3. (a) D'après la formule de Pascal on a :

$$\forall k \in [\![0, i+1]\!],\ \binom{i+1}{k} = \binom{i}{k} + \binom{i}{k-1}$$ (vrai même si $k=0$ et $k=n+1$)

Donc :

$$\sum_{k=0}^{i+1}\binom{i+1}{k}a_{k+j} = \sum_{k=0}^{i+1}\binom{i}{k}a_{k+j} + \sum_{k=0}^{i+1}\binom{i}{k-1}a_{k+j}$$

$$= \binom{i}{i+1}a_{k+i+1} + \sum_{k=0}^{i}\binom{i}{k}a_{k+j} + \sum_{k=1}^{i+1}\binom{i}{k-1}a_{k+j} + \binom{i}{-1}a_j$$

car $\binom{i}{i+1} = \binom{i}{-1} = 0 \longrightarrow$

$$= \sum_{k=0}^{i}\binom{i}{k}a_{k+j} + \sum_{k=1}^{i+1}\binom{i}{k-1}a_{k+j}$$

changement d'indice $k' = k+1$ dans la seconde somme $\longrightarrow$

$$= \sum_{k=0}^{i}\binom{i}{k}a_{k+j} + \sum_{k=0}^{i}\binom{i}{k}a_{k+j+1}$$

3.(b) $x_j^{(i+1)}$ est obtenu en additionnant les deux nombres de la ligne supérieure entre lesquels il est placé :

$$\begin{array}{ccccc} - & - & - & - & - \\ \cdots & x_j^{(i)} & & x_{j+1}^{(i)} & \cdots \\ \cdots & & x_j^{(i+1)} & & \cdots \\ & - & - & - & \end{array}$$

Donc $x_j^{(i+1)} = x_j^{(i)} + x_{j+1}^{(i)}$

3.(c) Pour $i \in [\![0,n]\!]$ on note $P(i)$ le prédicat :

" $\forall j \in [\![0,n-i]\!],\ x_j^{(i)} = \sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k} a_{k+j}$ "

Initialisation Pour $i=0$. On se donne $j \in [\![0,n]\!]$.

Alors $x_j^{(0)} = a_j$ (c'est la première ligne)

et $\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a_{k+j} = a_j$

Donc $P(0)$ est vrai.

Hérédité : Soit $i \in [\![0,n-1]\!]$ pour lequel $P(i)$ est vrai.

Montrons que $P(i+1)$ est vrai.

Soit $j \in [\![0, n-i-1]\!]$.

On a $x_j^{(i+1)} = x_j^{(i)} + x_{j+1}^{(i)}$ d'après 3.(b)

Comme $j \in [\![0, n-i-1]\!]$ on a $(j, j+1) \in [\![0, n-i]\!]^2$ donc

d'après $P(i)$: $x_j^{(i)} = \sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k} a_{k+j}$

$$x_{j+1}^{(i)} = \sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k} a_{k+j+1}$$

Donc $x_j^{(i+1)} = \sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k} a_{k+j} + \sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k} a_{k+j+1}$

$$= \sum_{k=0}^{i+1} \binom{i+1}{k} a_{k+j} \quad \text{d'après 3.(a)}$$

Donc $P(i+1)$ est vraie.

Par récurrence finie : $P(i)$ est vrai pour tout $i \in [\![0, n]\!]$.

3.(d) En particulier $P(n)$ est vraie :

$$x_0^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k$$

Dans la première question : $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $a_k = k$

Donc $x_0^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k = n 2^{n-1}$ d'après 2.

vérif : pour $n = 7$ on trouve $7 \times 2^6 = 448$

EXERCICE

1.(a) Comme $16 < 17 < 25$ on a $4 < \sqrt{17} < 5$.

donc $34 - 2\sqrt{17} < 26$ et $42 < 34 + 2\sqrt{17}$

donc $\boxed{\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} < 6}$ et $\boxed{6 < \sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}$

De plus $-4 < 1 - \sqrt{17}$ donc $\sqrt{17} - 1 < 4$

donc $(\sqrt{17} - 1)\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} < 24$

donc $-24 < (1 - \sqrt{17})\sqrt{34 - 2\sqrt{17}}$

D'autre part : $48 < 8\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}$

Finalement : $A > 48 - 24 = 24$ donc $\boxed{A > 0}$.

1.(b) En développant on trouve $\boxed{A^2 = 680 + 152\sqrt{17}}$

puis comme $A > 0$: $\boxed{A = 2\sqrt{170 + 38\sqrt{17}}}$

2. On veut résoudre $\begin{cases} x + y = \dfrac{1 - \sqrt{17}}{4} \\ xy = -\dfrac{1}{4} \end{cases}$

D'après le cours x et y sont les racines de :

$$z^2 - \frac{1 - \sqrt{17}}{4} z - \frac{1}{4} = 0$$

$$\Delta = \frac{18 - 2\sqrt{17}}{16} + 1 = \frac{34 - 2\sqrt{17}}{16} > 0$$

donc $$z = \frac{\frac{1-\sqrt{17}}{4} \pm \frac{\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{4}}{2}$$

ie $$z = \frac{1-\sqrt{17} \pm \sqrt{34-2\sqrt{17}}}{8}$$

donc $x = \dfrac{1-\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{8}$ et $y = \dfrac{1-\sqrt{17}-\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{8}$

ou $x = \dfrac{1-\sqrt{17}-\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{8}$ et $y = \dfrac{1-\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{8}$

3. (a) $$S_n(a,h) + i T_n(a,h) = \sum_{k=0}^{n-1} e^{i(a+kh)}$$
$$= e^{ia} \times \sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{ih}\right)^k$$

Ici $\sin\left(\frac{h}{2}\right) = 0$ donc $\frac{h}{2} \equiv 0\ [\pi]$ donc $h \equiv 0\ [2\pi]$

donc $e^{ih} = 1$.

Donc $S_n(a,h) + i . T_n(a,h) = e^{ia} \times n$

donc $$\boxed{\begin{aligned} S_n(a,h) &= n \times \cos a \\ T_n(a,h) &= n \times \sin a \end{aligned}}$$

3.(b) Si $\sin\left(\frac{h}{2}\right) \neq 0$ on a $e^{ih} \neq 1$

donc $S_n(a,h) + i\,T_n(a,h) = e^{ia} \times \dfrac{1-(e^{ih})^n}{1-e^{ih}} = e^{ia} \times \dfrac{1-e^{inh}}{1-e^{ih}}$

$= e^{ia} \times \dfrac{e^{i\frac{nh}{2}}}{e^{i\frac{h}{2}}} \times \dfrac{-2i\,\sin\left(\frac{nh}{2}\right)}{-2i\sin\left(\frac{h}{2}\right)}$

$= e^{i\left(a+\frac{(n-1)h}{2}\right)} \times \dfrac{\sin\left(\frac{n}{2}h\right)}{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}$

Donc $\boxed{\begin{aligned} S_n(a,h) &= \cos\left(a+\frac{(n-1)h}{2}\right) \times \frac{\sin\left(\frac{n}{2}h\right)}{\sin\left(\frac{h}{2}\right)} \\ T_n(a,h) &= \sin\left(a+\frac{(n-1)h}{2}\right) \times \frac{\sin\left(\frac{n}{2}h\right)}{\sin\left(\frac{h}{2}\right)} \end{aligned}}$

4.(a) On a $\cos\left(\frac{\pi}{17}\right) = -\cos\left(\pi - \frac{\pi}{17}\right) = -\cos\left(\frac{16\pi}{17}\right)$

donc $\boxed{\cos(\theta) = -\cos(16\theta)}$

et $\sin\left(\frac{\pi}{17}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{17}\right) = \sin\left(\frac{16\pi}{17}\right)$

donc $\boxed{\sin(\theta) = \sin(16\theta)}$

4.(b) $x_1 = \cos(3\theta) + \cos(5\theta) + \cos(7\theta) + \cos(11\theta)$

$= \cos(3\theta) + \cos(5\theta) + \cos(7\theta) - \cos(6\theta)$

$= \cos(3\theta) + \cos(5\theta)$

mais les réels 3θ, 5θ, 7θ, 6θ sont dans l'intervalle $]0, \frac{\pi}{2}[$ intervalle sur lequel cos est strictement décroissante et strictement positive.

Donc $\cos(5\theta) > \cos(6\theta)$

et $\cos(3\theta) > 0$

et $\cos(7\theta) > 0$

Donc $\boxed{x_1 > 0}$.

4.(c) $x_1 + x_2 = \sum_{k=0}^{7} \cos((2k+1)\theta) = S_8(\theta, 2\theta)$

d'après 3.(b)

$$= \cos\left(\theta + \frac{7}{2} 2\theta\right) \times \frac{\sin\left(\frac{8 \times 2\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{2\theta}{2}\right)} = \frac{\cos(8\theta) \times \sin(8\theta)}{\sin(\theta)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \sin(16\theta)}{\sin(\theta)} = \boxed{\frac{1}{2}}$$ d'après 4.(a)

4.(d).i. $x_1 \times x_2 = \cos(\theta)\cos(3\theta) + \cos(\theta)\cos(5\theta) + \cos(\theta)\cos(7\theta) + \cos(\theta)\cos(11\theta)$
$+ \cos(3\theta)\cos(9\theta) + \cos(3\theta)\cos(13\theta) + \cos(3\theta)\cos(15\theta)$
$+ \cos(5\theta)\cos(9\theta) + \cos(5\theta)\cos(13\theta) + \cos(5\theta)\cos(15\theta)$
$+ \cos(7\theta)\cos(9\theta) + \cos(7\theta)\cos(13\theta) + \cos(7\theta)\cos(15\theta)$
$+ \cos(9\theta)\cos(11\theta)$
$+ \cos(11\theta)\cos(13\theta) + \cos(11\theta)\cos(15\theta)$

4.(d).ii $\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\left(\cos(a+b) + \cos(a-b)\right)$

Donc :

$$x_1 \times x_2 = \frac{1}{2}\Big[\cos(4\theta) + \cos(2\theta) + \cos(6\theta) + \cos(4\theta) + \cos(8\theta) + \cos(6\theta)$$
$$+ \cos(12\theta) + \cos(10\theta) + \cos(12\theta) + \cos(6\theta) + \cos(16\theta) + \cos(10\theta)$$
$$+ \cos(18\theta) + \cos(12\theta) + \cos(14\theta) + \cos(4\theta) + \cos(18\theta) + \cos(8\theta)$$
$$+ \cos(20\theta) + \cos(10\theta) + \cos(16\theta) + \cos(2\theta) + \cos(20\theta) + \cos(6\theta)$$
$$+ \cos(22\theta) + \cos(8\theta) + \cos(20\theta) + \cos(2\theta) + \cos(24\theta) + \cos(2\theta)$$
$$+ \cos(26\theta) + \cos(4\theta)\Big]$$

$$x_1 \times x_2 = \frac{1}{2}\Big[4\cos(2\theta) + 4\cos(4\theta) + 4\cos(6\theta) + 3\cos(8\theta) + 3\cos(10\theta)$$
$$+ 3\cos(12\theta) + \cos(14\theta) + 2\cos(16\theta) + 2\cos(18\theta)$$
$$+ 3\cos(20\theta) + \cos(22\theta) + \cos(24\theta) + \cos(26\theta)\Big]$$

4.(d).iii. $$x_1x_2 = \frac{1}{2}\Big[-4\cos(15\theta) - 4\cos(13\theta) - 4\cos(11\theta) - 3\cos(9\theta) - 3\cos(7\theta)$$
$$- 3\cos(5\theta) - \cos(3\theta) - 2\cos(\theta) - 2\cos(\theta)$$
$$- 3\cos(3\theta) - \cos(5\theta) - \cos(7\theta) - \cos(9\theta)\Big]$$
$$= -2\cos\theta - 2\cos(3\theta) - 2\cos(5\theta) - 2\cos(7\theta) - 2\cos(9\theta)$$
$$- 2\cos(11\theta) - 2\cos(13\theta) - 2\cos(15\theta)$$

donc $\boxed{x_1 x_2 = -2(x_1 + x_2)}$

4.(d).iv On a donc $\boxed{x_1 x_2 = -1}$

4.(e) x_1 et x_2 sont donc les racines de $z^2 - \frac{1}{2}z - 1 = 0$

$$\Delta = \frac{1}{4} + 4 = \frac{17}{4}$$

donc $z = \dfrac{\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{17}}{2}}{2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{17}}{4}$

Comme on a vu que $x_1 > 0$ à la question 4.(b) on a :

$\boxed{x_1 = \frac{1+\sqrt{17}}{4}}$ et $\boxed{x_2 = \frac{1-\sqrt{17}}{4}}$

4.(f).i.
$$y_1 y_2 = \cos(3\theta)\cos(7\theta) + \cos(3\theta)\cos(11\theta) + \cos(5\theta)\cos(7\theta) + \cos(5\theta)\cos(11\theta)$$
$$= \frac{1}{2}\Big(\cos(10\theta) + \cos(4\theta) + \cos(14\theta) + \cos(8\theta) + \cos(12\theta) + \cos(2\theta) + \cos(16\theta) + \cos(6\theta)\Big)$$
$$= \frac{1}{2}\Big(-\cos(7\theta) - \cos(13\theta) - \cos(3\theta) - \cos(9\theta) - \cos(5\theta) - \cos(15\theta) - \cos(\theta) - \cos(11\theta)\Big)$$
$$= -\frac{1}{2}(x_1 + x_2) = \boxed{-\frac{1}{4}}$$

$$y_3 y_4 = \cos(\theta)\cos(9\theta) + \cos(\theta)\cos(15\theta) + \cos(9\theta)\cos(13\theta) + \cos(13\theta)\cos(15\theta)$$
$$= \frac{1}{2}\Big(\cos(10\theta) + \cos(8\theta) + \cos(16\theta) + \cos(14\theta) + \cos(22\theta) + \cos(4\theta) + \cos(28\theta) + \cos(2\theta)\Big)$$
$$= \frac{1}{2}\Big(-\cos(7\theta) - \cos(9\theta) - \cos(\theta) - \cos(3\theta) - \cos(5\theta) - \cos(13\theta) - \cos(11\theta) - \cos(15\theta)\Big)$$
$$= -\frac{1}{2}(x_1 + x_2) = \boxed{-\frac{1}{4}}$$

4.f.(ii) On a aussi $y_1 + y_2 = x_1 = 1+\sqrt{17}$

$$y_3 + y_4 = x_2 = \frac{1-\sqrt{17}}{4}$$

D'après 2. y_3 et y_4 sont racines de $z^2 - \frac{1-\sqrt{17}}{4} z - \frac{1}{4} = 0$

$$y_3 = \cos\frac{\pi}{17} + \cos\frac{13\pi}{17} = \cos\frac{\pi}{17} - \cos\frac{4\pi}{17} > 0$$

car $\frac{\pi}{17}$ et $\frac{4\pi}{17}$ sont dans $]0, \frac{\pi}{2}[$ et cos est strictement décroissante sur cet intervalle

de même $y_4 < 0$

Donc

$$\boxed{y_3 = \frac{1-\sqrt{17} + \sqrt{34-2\sqrt{17}}}{8} \qquad y_4 = \frac{1-\sqrt{17} - \sqrt{34-2\sqrt{17}}}{8}}$$

Et en raisonnant de même :

$$\boxed{y_1 = \frac{1+\sqrt{17} + \sqrt{34+2\sqrt{17}}}{8} \qquad y_2 = \frac{1+\sqrt{17} - \sqrt{34+2\sqrt{17}}}{8}}$$

4.(q) $y_1 = \cos(3\theta) + \cos(5\theta) = 2\cos(4\theta)\cos\theta = -2\cos(13\theta)\cos(\theta)$

On $y_3 = \cos(\theta) + \cos(13\theta)$

On en déduit que $\cos(\theta)$ et $\cos(13\theta)$ sont racines de

$$z^2 - y_3 z - \frac{y_1}{2} = 0$$

on sait que $\cos(\theta) > 0$ et $\cos(13\theta) < 0$.

Après calculs on trouve :

$$\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{17}\right) = \cos(\theta) = \frac{1}{16}\left(1 - \sqrt{17} + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + \sqrt{68 + 12\sqrt{17} + 2(1 - \sqrt{17})\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + 16\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}\right)}$$