Exercice 1

1.(a) On a :

$$\begin{cases} 2x+y-z+t=0 \\ -x-y+z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x,y \text{ qcq} \\ z=x+y \\ t=-x \end{cases}$$

Donc $G = \mathrm{Vect}\big((\underbrace{1,0,1,-1}_{\vec{a_1}}),(\underbrace{0,1,1,0}_{\vec{a_2}})\big)$

Ceci prouve que $\boxed{G \text{ est un sev de } \mathbb{R}^4,}$ donc G est un $\mathbb{R}$-ev.

Comme $\vec{a_1}$ et $\vec{a_2}$ sont non colinéaires, la famille $g \overset{\text{def}}{=} (\vec{a_1}, \vec{a_2})$ est libre et donc $\boxed{g \text{ est une base de } G}$.

Donc $\boxed{\dim(G) = \mathrm{Card}(g) = 2}$

1.(b) On a $\vec{a_1} \in G$ mais $i.\vec{a_1} \notin \mathbb{R}^4$ donc $i.\vec{a_1} \notin G$

Ainsi $\boxed{G \text{ n'est pas un } \mathbb{C}\text{ev}}$

2. g est libre.

Comme $\vec{u} \notin G = \mathrm{Vect}(g)$ on sait d'après le principe d'extension d'une famille libre que $\boxed{g \cup (\vec{u}) \text{ est libre}}$.

3.(a) $\mathcal{F}$ est génératrice de F et elle est libre car $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$ sont non colinéaires.

Donc $\boxed{\mathcal{F} \text{ est une base de } F}$ et $\boxed{\dim(F) = \mathrm{Card}(\mathcal{F}) = 2}$

3.(b) Soit $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$. On a :

$$(x,y,z,t) \in F \iff \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2 \,;\, (x,y,z,t) = a\vec{u_1} + b\vec{u_2}$$

$$\iff \begin{cases} a + 2b = x \\ -a + b = y \\ 3b = z \\ 2a + b = t \end{cases} \text{ est compatible}$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1}}{\iff} \begin{cases} a + 2b = x \\ 3b = x + y \\ 3b = z \\ -3b = t - 2x \end{cases} \text{ est compatible}$$

$$\underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_2}}{\iff} \begin{cases} a + 2b = x \\ 3b = x + y \\ 0 = x + y - z \\ 0 = -x + y + t \end{cases}$$

Donc $\boxed{F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \,;\, x + y - z = x - y - t = 0\}}$.

4. Soit $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$. On a :

$$(x,y,z,t) \in F \cap G \iff \begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - y - t = 0 \\ 2x + y - z + t = 0 \\ -x - y + z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + y - z = 0 \\ -2y + z - t = 0 \\ -y + z + t = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_1 \end{matrix}$$

$$\iff \begin{cases} x + y - z = 0 \\ -2y + z - t = 0 \\ -z - 3t = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \quad L_3 \leftarrow -2L_3 + L_2$$

$$\iff \begin{cases} x = -t \\ y = -2t \\ z = -3t \\ t \text{ qcq} \end{cases}$$

Donc $F \cap G = \mathrm{Vect}\big((1,2,3,-1)\big) \neq \{\vec{0}_{\mathbb{R}^4}\}$

Donc $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$ ne sont pas en somme directe.

$\boxed{\mathbb{F} \text{ et } \mathbb{G} \text{ ne sont donc pas supplémentaires dans } \mathbb{R}^4.}$

Comme $(1,2,3,-1) \neq \vec{0}_{\mathbb{R}^4}$ ce vecteur est une base de $\mathbb{F} \cap \mathbb{G}$

et donc $\dim(\mathbb{F} \cap \mathbb{G}) = 1$.

D'après la formule de Grassmann :

$$\dim(\mathbb{F} + \mathbb{G}) = \dim(\mathbb{F}) + \dim(\mathbb{G}) - \dim(\mathbb{F} \cap \mathbb{G})$$
$$= 2 + 2 - 1$$

Donc $\boxed{\dim(\mathbb{F} + \mathbb{G}) = 3}$.

5. Comme $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ sont non colinéaires la famille $\mathcal{G}'$ est une base de $\mathbb{G}'$.

De plus $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{F}$.

Montrons que $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}'$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

Comme $\text{Card}(\mathcal{F} \cup \mathcal{G}') = 4 = \dim(\mathbb{R}^4)$ il suffit de montrer que c'est une famille libre.

Soit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ réels tels que $\lambda_1 \vec{u_1} + \lambda_2 \vec{u_2} + \lambda_3 \vec{v_1} + \lambda_4 \vec{v_2} = \vec{0}$

Alors $\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ +3\lambda_2 - \lambda_3 + 2\lambda_4 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_4 = 0 \end{cases}$ et on trouve $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$

Donc $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}'$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

Par un th du cours : $\boxed{\mathbb{R}^4 = \mathbb{F} \oplus \mathbb{G}'}$

6.(a) On cherche $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ tel que :

$$\overrightarrow{w_1} = a\overrightarrow{u_1} + b\overrightarrow{u_2} + c\overrightarrow{v_1} + d\overrightarrow{v_2}$$

$$\iff \begin{cases} a + 2b - c + d = 1 \\ -a + b = 1 \\ 3b - c + 2d = 0 \\ 2a + b - d = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} a + 2b - c + d = 1 & \\ 3b - c + d = 2 & L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ 3b - c + 2d = 0 & \\ -3b + 2c - 3d = -1 & L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a + 2b - c + d = 1 & \\ 3b - c + d = 2 & \\ d = -2 & L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\ c - 2d = 1 & L_4 \leftarrow L_4 + L_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a = -2/3 \\ b = 1/3 \\ c = -3 \\ d = -2 \end{cases}$$

Donc $\boxed{\overrightarrow{w_1} = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -3, -2\right)_{\mathcal{B}}}$

On cherche $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ tel que :

$$\overrightarrow{w_2} = a\overrightarrow{u_1} + b\overrightarrow{u_2} + c\overrightarrow{v_1} + d\overrightarrow{v_2}$$

$$\iff \begin{cases} a + 2b - c + d = 4 \\ -a + b = 3 \\ 3b - c + 2d = 1 \\ 2a + b - d = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} a + 2b - c + d = 4 \\ 3b - c + d = 7 \\ d = -6 \\ c - 2d = 2 \end{cases}$$ d'après les calculs ci-dessus

$$\iff \begin{cases} a = -2 \\ b = 1 \\ c = -10 \\ d = -6 \end{cases}$$

Donc $\boxed{\overrightarrow{w_2} = (-2, 1, -10, -6)_{\mathcal{B}}}$

6.(b) On a :

$\vec{w_1} = 2\vec{u_1} + \vec{u_2} + 3\vec{v_1} = (1, -1, 0, 5)$

Or dans la base canonique B_c de $\mathbb{R}^4$ les composantes sont égales aux coordonnées.

Donc $\boxed{\vec{w_1} = (1, -1, 0, 5)_{B_c}}$

$\vec{w_2} = -2\vec{u_2} - \vec{v_1} + 3\vec{v_2} = (0, -2, 1, -5) = \boxed{(0, -2, 1, -5)_{B_c}}$

$\vec{w_3} = 4\vec{u_1} + \vec{u_2} + 2\vec{v_1} - \vec{v_2} = (3, -3, -1, 10) = \boxed{(3, -3, -1, 10)_{B_c}}$

Exercice 2

1. $u_0 = \int_0^1 \frac{1}{2} dx = \boxed{\frac{1}{2}}$

$$u_1 = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \Big[\ln(|1+x|)\Big]_0^1 = \ln(2) - \ln(1) = \boxed{\ln(2)}$$

$$u_2 = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \Big[\arctan(x)\Big]_0^1 = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4} - 0 = \boxed{\frac{\pi}{4}}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$u_{n+1} - u_n = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^{n+1}} - \int_0^1 \frac{dx}{1+x^n} = \int_0^1 \left(\frac{1}{1+x^{n+1}} - \frac{1}{1+x^n}\right) dx$$

$$= \int_0^1 \frac{x^n - x^{n+1}}{(1+x^{n+1}) \times (1+x^n)} dx = \int_0^1 \frac{x^n(1-x)}{(1+x^{n+1}) \times (1+x^n)} dx$$

La fonction $x \longmapsto \frac{x^n(1-x)}{(1+x^{n+1})(1+x^n)}$ est continue positive et non identiquement nulle sur $[0, 1]$ donc par stricte positivité de l'intégrale : $u_{n+1} - u_n > 0$.

Donc $\boxed{(u_n)_n \text{ est strictement croissante}}$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n - 1 = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^n} - \int_0^1 1\, dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{1+x^n} - 1\right) dx = \int_0^1 \frac{-x^n}{1+x^n} dx$$

Donc d'après l'inégalité triangulaire :

$$|u_n - 1| \leq \int_0^1 \left|\frac{-x^n}{1+x^n}\right| dx = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n} dx$$

Mais $\forall x \in [0,1]$, $\dfrac{x^n}{1+x^n} \leqslant \dfrac{x^n}{1} = x^n$ car $x^n \geqslant 0$
et $1+x^n \geqslant 1$

donc par croissance de l'intégrale : $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}dx \leqslant \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - 1| \leq \dfrac{1}{n+1}$

Comme $\dfrac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ le th de majoration de l'erreur

donne que $\boxed{u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1}$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}dx = \int_0^1 \underbrace{x}_{=u(x)} \times \underbrace{\frac{x^{n-1}}{1+x^n}}_{=v'(x)}dx \overset{IPP}{=} \left[x \frac{1}{n}\ln(1+x^n)\right]_0^1 - \int_0^1 1 \times \frac{1}{n}\ln(1+x^n)dx$$

$$= \frac{1}{n}\ln 2 - 0 - \frac{1}{n} \times \int_0^1 \ln(1+x^n)dx$$

L'IPP est licite car u, v sont de classe C^1 sur $[0,1]$.

Donc : $\boxed{\displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}dx = \frac{1}{n}\ln(2) - \frac{1}{n} \times \int_0^1 \ln(1+x^n)dx}$

5. Soit $n \in \mathbb{N}$.

Pour $x \in [0,1]$: $0 \leqslant \ln(1+x^n) = \displaystyle\int_0^{x^n} \frac{dt}{1+t} \leq \int_0^{x^n} 1 dt = x^n$

donc $0 \leqslant \displaystyle\int_0^1 \ln(1+x^n)dx \leq \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$

Comme $0 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $\dfrac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ le th des gendarmes donc que : $\boxed{\int_0^1 \ln(1+x^n)\,dx \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$

<u>6.</u> On a donc $\frac{1}{n} \times \int_0^1 \ln(1+x^n)\,dx \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right)$

donc $\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\,dx = \frac{1}{n}\ln(2) + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)$

Or $\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\,dx = \int_0^1 \frac{1+x^n-1}{1+x^n}\,dx = \int_0^1 \left(1-\frac{1}{1+x^n}\right)dx = 1 - u_n$

Donc $\boxed{u_n = 1 - \frac{1}{n}\ln(2) + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)}$

Exercice 3

1.(a) Il est clair que la fonction nulle appartient à $\mathbb{E}$

donc $E \neq \emptyset$.

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(y_1, y_2) \in \mathbb{E}^2$.

Alors $\lambda y_1 + y_2$ est trois fois dérivable sur $\mathbb{R}$ comme combinaison linéaire de fonctions qui le sont.

De plus :

$$(\lambda y_1 + y_2)^{(3)} - (\lambda y_1 + y_2) = \lambda y_1^{(3)} + y_2^{(3)} - \lambda y_1 - y_2$$

$$= \lambda \times (y_1^{(3)} - y_1) + y_2^{(3)} - y_2$$

$$= \lambda \times 0 + 0 = 0$$

Donc $\lambda y_1 + y_2 \in \mathbb{E}$.

Ainsi $\mathbb{E}$ est un sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Donc $\boxed{\mathbb{E} \text{ est un } \mathbb{R}\text{-ev}}$

1.(b) Soit $y \in \mathbb{F}$.

Alors y est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $y' = y$

Donc y' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $y'' = y' = y$

Donc y'' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $y^{(3)} = y' = y$

Donc $y \in \mathbb{E}$.

Ceci prouve que : $\boxed{\mathbb{F} \subseteq \mathbb{E}}$

Soit $y \in G$.

Alors y est 2 fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et $y'' = -y' - y$

Par somme de fonctions dérivables y'' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$y^{(3)} = -y'' - y' = y' + y - y' = y$$

Donc $y \in E$. Ceci prouve que $\boxed{G \subseteq E}$.

2.(a) Les solutions de (E_2) sont toutes les fonctions de la forme $t \mapsto Ce^t$ où $C \in \mathbb{R}$.

$z^2 + z + 1 = 0 \iff z = j$ ou $z = -\frac{1}{2} \pm i\sqrt{3}$

donc les solutions de (E_3) sont toutes les fonctions de la forme $t \mapsto e^{-t/2}\left(\lambda \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \mu \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right)$ où $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

2.(b) On a donc $F = \mathrm{Vect}(t \mapsto e^t)$ et $G = \mathrm{Vect}\left(t \mapsto e^{-t/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right), t \mapsto e^{-t/2}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right)$

Ceci prouve que $\boxed{F \text{ et } G \text{ sont des sev de } E.}$

La fonction $t \mapsto e^t$ n'est pas la fonction nulle donc $(t \mapsto e^t)$ est une base de F.

Les fonctions $t \mapsto e^{-t/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$ et $t \mapsto e^{-t/2}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$ sont non colinéaires

donc $\left(t \mapsto e^{-t/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right), t \mapsto e^{-t/2}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right)$ est une base de G.

3.(a) Comme y est 3 fois dérivable sur $\mathbb{R}$, y_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$.

De plus : $y_1' = y^{(3)} + y'' + y' = y + y'' + y' = y_1$. Donc $\boxed{y_1 \in F}$

De même y_2 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$y_2' = 2y' - y'' - y^{(3)} = 2y' - y'' - y$$

donc y_2' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$y_2'' = 2y'' - y^{(3)} - y' = 2y'' - y - y'$$

Alors : $y_2'' + y_2' + y_2 = 2y'' - y - y' + 2y' - y'' - y + 2y - y' - y'' = 0$

Donc $\boxed{y_2 \in \mathbb{G}.}$

<u>3.(b)</u> Comme $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$ sont des sev de $\mathbb{E}$ on a $\mathbb{F} + \mathbb{G} \subseteq \mathbb{E}$.

Réciproquement si $y \in \mathbb{E}$ alors on définit y_1 et y_2 comme en 3.(a).

Alors $y_1 + y_2 = 3y$ donc $y = \underbrace{\frac{1}{3} y_1}_{\in \mathbb{F}} + \underbrace{\frac{1}{3} \cdot y_2}_{\in \mathbb{G}}$

donc $y \in \mathbb{F} + \mathbb{G}$. Ceci prouve : $\mathbb{E} \subseteq \mathbb{F} + \mathbb{G}$.

Par double-inclusion : $\underline{\mathbb{E} = \mathbb{F} + \mathbb{G}}$

D'autre part si $y \in \mathbb{F} \cap \mathbb{G}$: $y' - y = 0$ et $y'' + y' + y = 0$

donc $y'' = y' = y$ et $3y = 0$ donc $y = 0$.

Ainsi $\mathbb{F} \cap \mathbb{G} \subseteq \{0\}$.

Comme $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$ sont des sev de $\mathbb{E}$: $\mathbb{F} \cap \mathbb{G} \neq \emptyset$

donc $\underline{\mathbb{F} \cap \mathbb{G} = \{0\}}$

Ainsi : $\boxed{\mathbb{E} = \mathbb{F} \oplus \mathbb{G}}$

3.(c) La famille $\left(t \mapsto e^{t}, t \mapsto e^{-t/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right), t \mapsto e^{-t/2}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right)$ est une base de E et $\boxed{\dim(E) = 3}$.

3.(d) Les solutions de (E_1) sont donc toutes les fonctions de la forme $t \mapsto Ce^{t} + \lambda e^{-t/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \mu e^{-t/2}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$ où $(C, \lambda, \mu) \in \mathbb{R}^3$.

Exercice 4

1. $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \int_k^{k+1}\frac{dt}{t}\right) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1}\frac{dt}{t}$

$$S_n = H_n - \int_1^{n+1}\frac{dt}{t} = H_n - \left(\ln(n+1) - \ln(1)\right) = \boxed{H_n - \ln(n+1)}$$

2(a) Pour $t \in [k, k+1]$:

$$\frac{1}{k+1} \leqslant \frac{1}{t} \leqslant \frac{1}{k}$$

Donc par croissance de l'intégrale :

$$\int_k^{k+1}\frac{dt}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1}\frac{dt}{t} \leqslant \int_k^{k+1}\frac{dt}{k}$$

ie $\frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1}\frac{dt}{t} \leqslant \frac{1}{k}$

Alors $\boxed{0 \leqslant a_k = \frac{1}{k} - \int_k^{k+1}\frac{dt}{t} \leqslant \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}}$

2.(b) Par somme d'inégalités on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$0 \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k \leqslant \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant S_n \leqslant 1 - \frac{1}{n+1} \leq 1$

La suite $\boxed{(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est donc majorée par } 1.}$

De plus : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_{n+1} - S_n = a_{n+1} \geqslant 0$

Donc (S_n) est croissante.

D'après le théorème de la limite monotone $\boxed{(S_n) \text{ converge}}$ 14

On pose $\gamma \overset{\text{def}}{=} \lim_{n\to+\infty} S_n$.

On a vu que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leq S_n \leq 1$.

Donc par prolongement des inégalités : $\boxed{0 \leq \gamma \leq 1}$

3. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$$a_k = \frac{1}{k} - \int_k^{k+1} \frac{dt}{t}$$

On pose $x = t - k$ ie $t = x + k$.
c'est un changement de variable affine donc licite.

Formellement : "$dt = dx$"

Alors $a_k = \frac{1}{k} - \int_0^1 \frac{dx}{x+k} = \frac{1}{k} - \int_0^1 \frac{dt}{t+k}$ car x et t sont muettes

$$a_k = \int_0^1 \frac{dt}{k} - \int_0^1 \frac{dt}{t+k} = \int_0^1 \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{t+k}\right) dt$$

$$a_k = \int_0^1 \frac{t}{k(t+k)} dt = \boxed{\frac{1}{k}\int_0^1 \frac{t}{t+k} dt}$$

On suppose $k \geq 2$.

Pour tout $t \in [0,1]$: $k \leq t+k \leq k+1$

donc $\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{t+k} \leq \frac{1}{k}$

donc $\frac{t}{k+1} \leq \frac{t}{t+k} \leq \frac{t}{k}$

Donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{t}{k+1}\,dt \leq \int_0^1 \frac{t}{t+k}\,dt \leq \int_0^1 \frac{t}{k}\,dt$

ie $\displaystyle\frac{1}{2(k+1)} \leq k a_k \leq \frac{1}{2k}$

Mais $\displaystyle\frac{1}{k} \leq \frac{1}{k-1}$ donc $\displaystyle\frac{1}{2(k+1)} \leq k a_k \leq \frac{1}{2(k-1)}$

donc $\displaystyle\frac{1}{2k(k+1)} \leq a_k \leq \frac{1}{2k(k-1)}$

Ainsi : $\boxed{\displaystyle\forall k \geq 2,\ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \leq a_k \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right)}$

4. On suppose $m > n \geq 1$.

Alors : $\displaystyle S_m - S_n = \sum_{k=n+1}^{m} a_k$

Comme $n+1 \geq 2$ on a par somme d'inégalités :

$$\frac{1}{2}\sum_{k=n+1}^{m}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \leq \sum_{k=n+1}^{m} a_k \leq \frac{1}{2}\sum_{k=n+1}^{m}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right)$$

ie : $\boxed{\displaystyle\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{m+1}\right) \leq S_m - S_n \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right)}$

Par prolongement des inégalités lorsque $m \to +\infty$:

$$\boxed{\frac{1}{2n+2} \leq \gamma - S_n \leq \frac{1}{2n}}$$

5. On a donc :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \frac{1}{2n+2}\leqslant \gamma - H_n + \ln(n+1)\leqslant \frac{1}{2n}$$

Donc :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \ln(n+1)-\ln n-\frac{2}{2n}\leqslant H_n-\gamma-\ln(n)-\frac{1}{2n}\leqslant \ln(n+1)-\ln(n)-\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{2n}$$

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n}\leqslant \underbrace{H_n-\gamma-\ln(n)-\frac{1}{2n}}_{\overset{\text{def}}{=}u_n}\leqslant \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\frac{2n+1}{2n(n+1)}$$

Mais : $$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n}\underset{n\to+\infty}{=}\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}-\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\underset{n\to+\infty}{=}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Et : $$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\frac{2n+1}{2n(n+1)}=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n}\times\frac{2+\frac{1}{n}}{2\left(1+\frac{1}{n}\right)}$$

$$\underset{n\to+\infty}{=}\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)-\frac{1}{n}\left(2+\frac{1}{n}\right)\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$\underset{n\to+\infty}{=}\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}-\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\underset{n\to+\infty}{=}o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

On a donc $n\times\left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n}\right)\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$

et $n\times\left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\frac{2n+1}{2n(n+1)}\right)\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$

Par encadrement :

$$n u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

donc $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right)$

ie $\boxed{H_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)}$

6. L'inégalité du 4. donne :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq \gamma - S_n - \frac{1}{2n+2} \leq \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+2}$$

ie $\boxed{0 \leq \gamma - T_n \leq \frac{1}{2n(n+1)}}$

7. On choisit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{2n(n+1)} \leq 10^{-2}$

ie $50 \leq n(n+1)$

On prend $n = 7$.

Alors : $\boxed{0 \leq \gamma - T_7 \leq 10^{-2}}$

$$T_7 = \frac{1487}{560} - 3\ln(2)$$