PCSI 1 - DEVOIR MAISON N ° 4 - Version 2 **Année scolaire 2020-2021**
A rendre le mardi 3 novembre 2020

EXERCICE 1 : Fonctions hyperboliques

On définit les fonctions sinus hyperbolique sh, cosinus hyperbolique ch et tangente hyperbolique th en posant pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\operatorname{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \operatorname{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \operatorname{th}(x) = \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)}$$

1. Rappeler l'allure des courbes représentatives des fonctions sh et ch.
2. Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x) = 1$.
3. Démontrer les formules pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:
$$\operatorname{ch}(x+y) + \operatorname{sh}(x+y) = (\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x)(\operatorname{ch} y + \operatorname{sh} y)$$
et :
$$\operatorname{ch}(x+y) - \operatorname{sh}(x+y) = (\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x)(\operatorname{ch} y - \operatorname{sh} y)$$
En déduire des formules pour $\operatorname{ch}(x+y)$ et $\operatorname{sh}(x+y)$.
4. Démontrer que th est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, calculer sa dérivée et dessiner l'allure de sa courbe. Démontrer ensuite qu'elle est bijective de $\mathbb{R}$ vers l'intervalle $]-1, 1[$.
5. Montrer que :
$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \operatorname{th}(x+y) = \frac{\operatorname{th}(x) + \operatorname{th}(y)}{1 + \operatorname{th}(x)\operatorname{th}(y)}$$
6. Démontrer que la réciproque argth de la fonction th est impaire. Démontrer ensuite qu'elle est dérivable sur $]-1, 1[$ et calculer sa dérivée.
Dans cette question, on ne cherchera pas à déterminer une expression de $\operatorname{argth}(y)$.
7. (a) Soient $x \in]-1, 1[$ et $y = \operatorname{argth}(x)$. Montrer que $e^{2y} = \dfrac{1+x}{1-x}$.
(b) En déduire une expression de argth à l'aide de la fonction ln, et retrouver sa dérivée à l'aide de cette nouvelle expression.
8. On considère désormais la fonction $f : x \longmapsto \operatorname{argth}\left(\sqrt{\dfrac{\operatorname{ch} x - 1}{\operatorname{ch} x + 1}}\right)$.
(a) Déterminer le domaine de définition de f.
(b) Soit $x \in \mathcal{D}_f$. On pose $y = \operatorname{ch} x$. Montrer que $f(x) = \dfrac{1}{2}\ln(y + \sqrt{y^2 - 1})$.
(c) En déduire que $\forall x \in \mathcal{D}_f$, $f(x) = \dfrac{|x|}{2}$.
9. Montrer que, si $(x, y) \in]-1, 1[^2$, alors $\dfrac{x+y}{1+xy} \in]-1, 1[$, et en déduire que :
$$\operatorname{argth}(x) + \operatorname{argth}(y) = \operatorname{argth}\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)$$
10. (a) Montrer que :
$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \operatorname{argth}\left(\frac{1}{k^2+3k+1}\right) = \operatorname{argth}\left(\frac{1}{k+1}\right) - \operatorname{argth}\left(\frac{1}{k+2}\right)$$
(b) On note $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \operatorname{argth}\left(\frac{1}{k^2+3k+1}\right)$. Obtenir une formule simple pour S_n.
(c) En déduire la limite de S_n quand n tend vers $+\infty$.