

EXERCICE 1 : Un endomorphisme de \mathbb{R}^3

Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ d'expression analytique $f(x, y, z) = (2x - y - z, x - z, x - y)$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de \mathbb{R}^3 .
2. Déterminer une base de $\text{Ker}(f)$.
3. Déterminer une base de $\text{Im}(f)$.
4. f est-il injectif? surjectif? Est-ce un automorphisme?
5. Montrer que f est une projection. Préciser son support et sa direction.
6. Donner l'expression analytique de la projection associée.
7. Déterminer le rang de f .

EXERCICE 2 : Un endomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$.

Dans cet exercice n est un entier naturel non nul fixé.

Soit $\varphi : \mathbb{K}_n[X] \rightarrow \mathbb{K}[X]$ définie par $\varphi(P(X)) = P(-X)$.

1. Calculer $\varphi(1 + X + 3X^2 + 2X^3 - 2X^4 - X^5)$.
2. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$.
3. Montrer que φ est une symétrie. Préciser son support et sa direction.
4. φ est-il injectif? surjectif? Est-ce un automorphisme?
5. Déterminer le rang de φ .