PCSI1 - DEVOIR SURVEILLE N ° 1 **Année scolaire 2020-2021**
Samedi 26 septembre 2020

Durée du devoir : 2h00.

Les calculatrices ne sont pas autorisées. Les exercices sont indépendants, on les traitera dans l'ordre souhaité.

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Exercice 1 : Calculs ensemblistes

Soient E un ensemble et A, B, C des parties de E. Montrer :

$$A \cup B = A \cup C \Longleftrightarrow A \cup \overline{B} = A \cup \overline{C}$$

où on a noté $\overline{B}$ (resp. $\overline{C}$) le complémentaire de B (resp. de C) dans E.

Exercice 2 : Exemples d'applications

Soient f et g deux applications de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{N}$ définies par $\forall x \in \mathbb{N}$, $f(x) = x + 1$ et :

$$\forall y \in \mathbb{N}, \quad g(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y = 0 \\ y - 1 & \text{si } y \geq 1 \end{cases}$$

1. Étudier l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité éventuelles de f et de g.
2. Préciser $g \circ f$ et $f \circ g$.

Exercice 3 : Étude d'injectivité et surjectivité pour des composées

1. Soient E, F, G des ensembles et deux applications $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$. Démontrer que :
   (a) si $g \circ f$ est injective alors f est injective ;
   (b) si $g \circ f$ est surjective alors g est surjective ;
   (c) si $g \circ f$ est bijective alors f est injective et g est surjective.
2. Soient E, F, G des ensembles et tois applications $f : E \longrightarrow F$, $g : F \longrightarrow G$ et $h : G \longrightarrow E$. Démontrer que si $h \circ g \circ f$ et $g \circ f \circ h$ sont surjectives et $f \circ h \circ g$ injective alors f, g et h sont bijectives.

Exercice 4 : Un peu de dénombrement

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Combien y a-t-il de nombre entiers naturels dont l'écriture en base dix (c'est à dire avec des chiffres compris entre 0 et 9) comporte exactement n chiffres, dont une seule fois le chiffre 1 ?
2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et E un ensemble fini à n éléments. On appelle *relation* $\mathcal{R}$ sur E toute propriété vraie pour certains couples (x, y) d'éléments de E, et fausse pour les autres. De plus, on dit que :
   - $\mathcal{R}$ est *réflexive* si $\forall x \in E$, $x\mathcal{R}x$;
   - $\mathcal{R}$ est *symétrique* si $\forall (x, y) \in E^2$, $x\mathcal{R}y \Longrightarrow y\mathcal{R}x$.

   Démontrer que dans E :
   (a) il y a 2^{n^2} relations ;
   (b) il y a 2^{n^2-n} relations réflexives ;
   (c) il y a $2^{(n^2+n)/2}$ relations symétriques ;