Durée du devoir : 30min + 3h30

Les calculatrices collèges sont autorisées. Les exercices sont indépendants, on les traitera dans l'ordre souhaité. Il est vivement conseillé de gérer son temps de manière à tous les aborder. Le devoir de cours est à rendre sur une copie séparée des exercices.

<u>Devoir de cours</u> : Durée max 30min.

Aucune démonstration n'est demandée. Toutes les variables utilisées doivent être définies.

1. Donner la définition de $f : E \longrightarrow F$ surjective.
2. Énoncer la formule du binôme de Newton.
3. Énoncer les formules d'Euler.
4. Énoncer le théorème qui donne des conditions suffisantes pour que f^{-1} existe et soit dérivable sur un intervalle J.
5. Énoncer le théorème qui donne une condition nécessaire pour que f ait un extremum local en un point x_0 d'un intervalle I.

<u>Exercice 1</u> : Calculs de sommes.

Soient n et p deux entiers naturels, avec $n \geq p$. On pose :

$$S_{n,p} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} k^p$$

L'objectif de cet exercice est d'étudier quelques propriétés des sommes $S_{n,p}$.

1. Dans cette question on étudie le cas $p = 0$: $S_{n,0} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$.
   (a) Montrer que pour tout entier naturel n non nul on a : $S_{n,0} = 0$.
   (b) Et que vaut $S_{0,0}$?
2. Dans cette question on étudie le cas $p = 1$ (et donc $n \geq 1$) : $S_{n,1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} k$.

   On pose : $\forall x \in \mathbb{R},\ \ f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} x^k$.
   (a) En utilisant la formule du binôme simplifier $f(x)$.
   (b) Donner deux expressions différentes de la dérivée $f'(x)$ (une en utilisant la définition de $f(x)$ et une autre en utilisant la formule de la question précédente).
   (c) Déduire de la question précédente la valeur de $S_{1,1}$, et celle de $S_{n,1}$ pour tout entier $n > 1$.
3. On revient au cas général où n et p sont deux entiers naturels, avec $n \geq p$.
   (a) En utilisant la formule du pion et la formule de Pascal, établir que si $p \in \mathbb{N}$ et $n \geq p+1$:
   $$S_{n,p+1} = n(S_{n,p} - S_{n-1,p})$$
   (b) Établir que :
   $$\forall p \in \mathbb{N},\ \forall n > p, \quad S_{n,p} = 0$$

<u>Exercice 2</u> : Ceci n'est pas le triangle de Pascal.

On considère le triangle numérique suivant, où chaque nombre est obtenu en additionnant les deux nombres de la ligne supérieure entre lesquels il est placé :

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc}
0 & & 1 & & 2 & & 3 & & 4 & & 5 & & \dots \\
& 1 & & 3 & & 5 & & 7 & & 9 & & \dots & \\
& & 4 & & 8 & & 12 & & 16 & & \dots & & \\
& & & 12 & & 20 & & 28 & & \dots & & & \\
& & & & 32 & & 48 & & \dots & & & & \\
& & & & & 80 & & \dots & & & & & \\
& & & & & & \dots & & & & & &
\end{array}$$

1. Calculer le nombre inscrit à la pointe (c'est-à-dire tout en bas) du triangle d'ordre 7, c'est-à-dire du triangle dont la première ligne est :

$$0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7$$

   On demande une réponse sans démonstration.

2. Pour $n \in \mathbb{N}$ calculer la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$.

3. Soient a_0, a_1, a_2, ...des nombres complexes et soit $n \in \mathbb{N}$. On construit, selon le modèle précédent, le triangle numérique d'ordre n, obtenu en mettant sur la première ligne les nombres :

$$a_0 \quad a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_n$$

   Pour $i \in [\![0, n]\!]$ et $j \in [\![0, n-i]\!]$ on note $x_j^{(i)}$ le j-ième nombre de la i-ième ligne du triangle (en commençant les numérotations à 0). Ainsi $x_0^{(0)} = a_0$, $x_1^{(0)} = a_1$, $x_0^{(1)} = a_0 + a_1$, etc... Le nombre inscrit à la pointe du triangle d'ordfre n est donc $x_0^{(n)}$.

   (a) Soient $i \in [\![0, n]\!]$ et $j \in [\![0, n-i-1]\!]$. A l'aide de la formule de Pascal et d'un changement d'indice montrer l'égalité :

$$\sum_{k=0}^{i+1} \binom{i+1}{k} a_{k+j} = \sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k} a_{k+j} + \sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k} a_{k+j+1}$$

   (b) Soient $i \in [\![0, n]\!]$ et $j \in [\![0, n-i-1]\!]$. Démontrer que : $x_j^{(i+1)} = x_j^{(i)} + x_{j+1}^{(i)}$.

   (c) Montrer alors par récurrence finie sur $i \in [\![0, n]\!]$ que :

$$\forall j \in [\![0, n-i]\!] , \quad x_j^{(i)} = \sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k} a_{k+j}$$

   (d) En déduire la valeur du nombre inscrit à la pointe du triangle d'ordre n de la première question.

Exercice 3 : Calcul de $\cos\left(\dfrac{\pi}{17}\right)$**.**

L'objet de ce problème est d'exprimer $\cos\left(\dfrac{\pi}{17}\right)$ à l'aide de radicaux.

1. On pose $A = (1-\sqrt{17})\sqrt{34-2\sqrt{17}} + 8\sqrt{34+2\sqrt{17}}$.
   (a) Montrer que $\sqrt{34-2\sqrt{17}} < 6$ et $\sqrt{34+2\sqrt{17}} > 6$. En déduire que $A > 0$.
   (b) Calculer A^2 et en déduire que $A = 2\sqrt{170+38\sqrt{17}}$.

2. Trouver tous les couples (x, y) de réels ayant pour somme $\dfrac{1-\sqrt{17}}{4}$ et pour produit $-\dfrac{1}{4}$.
   On trouve des racines carrées emboîtées et les nombres 17 *et* 34 *apparaissent.*

3. On désigne dans cette question par a et h deux réels, et n un entier naturel non nul. On pose :

$$S_n(a,h) = \sum_{k=0}^{n-1} \cos(a+kh) \qquad \text{et} \qquad T_n(a,h) = \sum_{k=0}^{n-1} \sin(a+kh)$$

   qu'on pourra noter plus simplement S_n et T_n.
   (a) On suppose $\sin\left(\dfrac{h}{2}\right) = 0$. Calculer S_n et T_n en fonction de a et n.
   (b) On suppose $\sin\left(\dfrac{h}{2}\right) \neq 0$. Calculer S_n et T_n en fonction de a et n. On mettra le résultat sous la forme :

$$S_n = \frac{\sin\left(\dfrac{nh}{2}\right)\cos(\ldots?\ldots)}{\sin\left(\dfrac{h}{2}\right)}$$

4. Dans la suite du problème, on pose $\boxed{\theta = \dfrac{\pi}{17}}$.
   En outre, on pose :

$$\begin{cases} x_1 &= \cos(3\theta)+\cos(5\theta)+\cos(7\theta)+\cos(11\theta) \\ x_2 &= \cos(\theta)+\cos(9\theta)+\cos(13\theta)+\cos(15\theta) \end{cases}$$

   (a) Comparer $\cos(\theta)$ et $\cos(16\theta)$. Comparer de même $\sin(\theta)$ et $\sin(16\theta)$.
   (b) Vérifier que $x_1 = \cos(3\theta)+\cos(5\theta)+\cos(7\theta)-\cos(6\theta)$ et en déduire $x_1 > 0$.
   (c) Vérifier que $(x_1+x_2) = S_8(\theta, 2\theta)$. En déduire que $x_1 + x_2 = \dfrac{1}{2}$.
   (d) Dans cette question, on cherche une expression simple du produit x_1x_2.
      i. Développer le produit x_1x_2.
      ii. Simplifier cette expression en utilisant la formule de linéarisation d'un produit de cosinus : $\cos(a)\cos(b) = \dfrac{1}{2}\big(\cos(a+b)+\cos(a-b)\big)$.
      iii. En utilisant que pour tout réel t on a $\cos(\pi-t) = \cos(t+\pi) = -\cos(t)$, établir que $x_1x_2 = -2(x_1+x_2)$.
      iv. En déduire la valeur de x_1x_2.
   (e) Déduire de ce qui précède des expressions de x_1 et x_2 à l'aide de racines carrées.

(f) On pose à présent :

$$\begin{cases} y_1 &=& \cos(3\theta)+\cos(5\theta) \\ y_2 &=& \cos(7\theta)+\cos(11\theta) \\ y_3 &=& \cos(\theta)+\cos(13\theta) \\ y_4 &=& \cos(9\theta)+\cos(15\theta) \end{cases}$$

i. En s'inspirant des questions précédentes montrer que $y_1y_2 = y_3y_4 = -\dfrac{1}{4}$.

ii. En déduire des expressions des quatre nombres y_1, y_2, y_3 et y_4 à l'aide de racines carrées, éventuellement superposées.

(g) Exprimer y_1 sous forme d'un produit de cosinus. En déduire que :

$$\cos\left(\frac{\pi}{17}\right) = \frac{1}{16}\left(1-\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}+\sqrt{68+12\sqrt{17}+2(1-\sqrt{17})\sqrt{34-2\sqrt{17}}+16\sqrt{34+2\sqrt{17}}}\right)$$