PCSI1 - DEVOIR SURVEILLE N $^\circ$ 5 **Année scolaire 2020-2021**
Samedi 13 janvier 2021

Durée du devoir : 2h00

Exercice 1 **: Calcul de limites à l'aide d'équivalents.**

Les questions 1. et 2. sont indépendantes.

$\boxed{1.}$ On définit la fonction φ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ par :

$$\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{\arctan(x)}{\tan(x)} & \text{si } x \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[\\ a & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

où a désigne un réel.

$\boxed{(a)}$ Montrer que φ est continue sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

$\boxed{(b)}$ Montrer qu'il est possible de choisir a pour que φ soit continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.
On suppose désormais que a possède cette valeur.

$\boxed{(c)}$ Est-il possible de prolonger φ par continuité sur le segment $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$?

$\boxed{2.}$ Soient f et g continues sur $[0,1]$ et à valeurs réelles telles que $\sup\limits_{[0,1]}(f) = \sup\limits_{[0,1]}(g)$.
On souhaite montrer que les graphes de f et g se coupent.

$\boxed{1.}$ Ecrire la propriété « les graphes de f et g se coupent » avec des quantificateurs.

$\boxed{2.}$ Justifier qu'il existe $(a,b) \in [0,1]^2$ tel que $f(a) = \sup\limits_{[0,1]}(f)$ et $g(b) = \sup\limits_{[0,1]}(g)$.

$\boxed{3.}$ On définit $h : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ par $\forall x \in [0,1],\ h(x) = f(x) - g(x)$.
Donner le signe de $h(a)$ et de $h(b)$ puis conclure.

Exercice 2 **: Calcul de** $\dfrac{1}{1^2} + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \dots$

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ on définit le polynôme de $\mathbb{C}[X]$:

$$P_n(X) = \frac{1}{2i}\big((X+i)^n - (X-i)^n\big)$$

$\boxed{1.}$ **Premières propriétés.**

$\boxed{(a)}$ Déterminer P_1, P_2 et P_3.

$\boxed{(b)}$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Ecrire P_n sous forme développée et en déduire que P_n appartient à $\mathbb{R}[X]$.

$\boxed{(c)}$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le degré et le coefficient dominant de P_n.

$\boxed{(d)}$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Quelle est la parité du polynôme P_n ?

2. **Détermination des racines.** On fixe $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Montrer que si $z \in \mathbb{C}$ et $|z - i| = |z + i|$ alors $z \in \mathbb{R}$.
En déduire, sans les calculer explicitement, que toutes les racines de P_n sont réelles.

(b) Soit $x \in \mathbb{C}$.

Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$: résoudre l'équation $\dfrac{x+i}{x-i} = \mathrm{e}^{i2k\pi/n}$ d'inconnue $x \in \mathbb{C}$ en distinguant les cas $k = 0$ et $k \in [\![1, n-1]\!]$.

Montrer ensuite que : $P_n(x) = 0 \iff \exists k \in [\![1, n-1]\!]\ ;\ x = -i\dfrac{1 + \mathrm{e}^{i2k\pi/n}}{1 - \mathrm{e}^{i2k\pi/n}}$

En déduire que les racines de P_n sont les réels $\operatorname{cotan}\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)$ pour $k \in [\![1, n-1]\!]$.

On rappelle que $\operatorname{cotan} = \dfrac{\cos}{\sin}$.

(c) En déduire la factorisation de P_n en produit de polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.

3. **Etude d'une suite.**
On considère les suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ définies par :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \qquad \text{et} \qquad v_n = u_n + \frac{1}{n}$$

(a) Montrer que les suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ sont adjacentes.

(b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge. On notera α sa limite.

(c) Justifier que $|\alpha - u_n| \leq \dfrac{1}{n}$.
Indiquer une méthode permettant d'obtenir une valeur approchée à 10^{-5} près de α.

4. **Calcul d'une somme.** On fixe $n \in \mathbb{N}$.

(a) Montrer qu'il existe un polynôme R_n dans $\mathbb{R}_n[X]$ tel que :

$$P_{2n+1}(X) = R_n(X^2)$$

(b) Quel est le degré, noté d_n, du polynôme R_n ? Calculer les coefficients de X^{d_n} et de $X^{d_n - 1}$ dans $R_n(X)$.

(c) Montrer les racines de $R_n(X)$ sont les $\operatorname{cotan}^2\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)$ où $k \in [\![1, n]\!]$. En déduire sa factorisation dans $\mathbb{R}[X]$.

(d) En déduire l'égalité :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = \frac{n(2n-1)}{3}$$

5. **Calcul de α.**
On pose désormais, pour tout $k \in \mathbb{N}$: $\theta_k = \dfrac{k\pi}{2n+1}$.

(a) Montrer que, pour tout $\theta \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$: $0 < \sin(\theta) \leq \theta \leq \tan(\theta)$

(b) En déduire que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$:

$$\operatorname{cotan}^2(\theta_k) \leq \frac{1}{\theta_k^2} \leq 1 + \operatorname{cotan}^2(\theta_k)$$

(c) En déduire un encadrement de u_n pour $n \geq 1$, puis la valeur exacte de α.