Correction du DS6

PROBLEME

Partie A

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \ e^x > 0$

donc $\forall x \in \mathbb{R}, \ e^x + e^{-x} > 0$

donc $\boxed{\mathcal{D}_{th} = \mathbb{R}}$

th est continue sur $\mathbb{R}$ par somme et quotient de fonctions continues.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ th(-x) = \frac{e^{-x} - e^{x}}{e^{-x} + e^{x}} = -\frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}} = -th(x)$$

Donc th est impaire sur $\mathbb{R}$.

2. $\forall x \in \mathbb{R}, \ th'(x) = \dfrac{ch(x)^2 - sh(x)^2}{ch(x)^2} = \boxed{1 - th(x)^2}$

De plus $\forall x \in \mathbb{R}, \ ch(x)^2 - sh(x)^2 = \dfrac{e^{2x} + 2 + e^{-2x} - (e^{2x} - 2 + e^{-2x})}{4}$

$$= \frac{4}{4} = 1$$

donc on a aussi $\forall x \in \mathbb{R}, \ th'(x) = \boxed{\dfrac{1}{ch(x)^2}}$

3. On a donc $\forall x \in \mathbb{R}, \ th'(x) > 0$.

Donc th est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

D'après le théorème de la bijection monotone, th est bijective de $\mathbb{R}$ vers l'intervalle $I = f(\mathbb{R})$.

Mais $\forall x \in \mathbb{R}$, $th(x) = \dfrac{\cancel{e^{x}}}{\cancel{e^{x}}} \times \dfrac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$

ce qui donne $\lim\limits_{x \to +\infty} th(x) = \boxed{+1}$

Et comme th est impaire : $\lim\limits_{x \to -\infty} th(x) = \boxed{-1}$

Donc $\boxed{I =]-1,1[}$

Donc <u>th est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $]-1,1[$.</u>

<u>4.</u> Pour $x \in \mathbb{R}$ et $y \in]-1,1[$:

$$th(x) = y \iff \frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}} = y \iff e^{x} - e^{-x} = (e^{x} + e^{-x})y$$

$$\iff e^{x}.(1-y) = e^{-x}.(1+y)$$

$$\iff e^{2x} = \frac{1+y}{1-y} \quad \text{car } y \neq 1$$

$$\iff 2x = \ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right) \quad \text{car } \frac{1+y}{1-y} > 0$$

$$\iff x = \frac{1}{2}.\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)$$

Donc $\boxed{\forall y \in]-1,1[,\ argth(y) = \frac{1}{2}.\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)}$

5. A l'ordre 5 :

$$\mathrm{sh}(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{2}\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+\frac{x^5}{120}-1+x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}-\frac{x^4}{24}+\frac{x^5}{120}\right)+o(x^5)$$

donc $$\mathrm{sh}(x) \underset{x\to 0}{=} x+\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^5)$$
$$\underset{x\to 0}{=} x.\left(1+\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}+o(x^4)\right)$$

et de même $$\mathrm{ch}(x) \underset{x\to 0}{=} 1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)$$

donc $$\frac{1}{\mathrm{ch}(x)} \underset{x\to 0}{=} 1-\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)\right)+\left(\frac{x^4}{4}+\dots+o(x^4)\right)-\left(\dots+o(x^4)\right)+\left(\dots+o(x^4)\right)$$

car on sait que $$\frac{1}{1+t} \underset{t\to 0}{=} 1-t+t^2-t^3+t^4+o(t^4)$$

On a donc $$\boxed{\frac{1}{\mathrm{ch}(x)} \underset{x\to 0}{=} 1-\frac{x^2}{2}+\frac{5x^4}{24}+o(x^4)}$$

Par produit :

$$\mathrm{th}(x) \underset{x\to 0}{=} x\times\left(\left(1+\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}\right)\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{5x^4}{24}\right)+o(x^4)\right)$$

$$\mathrm{th}(x) \underset{x\to 0}{=} x\times\left(1-\frac{x^2}{3}+\frac{x^4}{4}+o(x^4)\right)\boxed{\underset{x\to 0}{=} x-\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+o(x^5)}$$

Partie B

6. $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f(-x) = (-x) \times sh\left(-\frac{1}{x}\right) = x . sh\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$

et $\mathbb{R}^*$ est une partie symétrique p/r à 0.

Donc f est paire sur $\mathbb{R}^*$.

7.(a) On a vu que $sh(x) \underset{x \to 0}{=} x + o(x)$ à l'ordre 1.

Donc $\boxed{sh(x) \underset{x \to 0}{\sim} x}$

Donc $f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} x \times \frac{1}{x} \underset{x \to +\infty}{\sim} 1$

donc $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1}$ puisque f est paire.

7.(b) Pour $x \neq 0$:

$$x . sh\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x e^{1/x} - x e^{-\frac{1}{x}}}{2}$$

On a $\lim\limits_{t \to +\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to 0^+} x e^{1/x} = +\infty$

et $\lim\limits_{x \to 0^+} x . e^{-1/x} = 0 \times 0 = 0$

donc $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$. Et f est paire donc : $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = +\infty$

On a donc $\boxed{\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} f(x) = +\infty}$

<u>f n'est donc pas prolongeable en 0 en une fonction continue.</u>

<u>8.</u> Pour tout $x \neq 0$:

$$f'(x) = sh\left(\frac{1}{x}\right) + x \times \frac{-1}{x^2} \times ch\left(\frac{1}{x}\right) = sh\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} \times ch\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$= \left[\frac{sh\left(\frac{1}{x}\right)}{ch\left(\frac{1}{x}\right)} - 1\right] \times ch\left(\frac{1}{x}\right)$$

donc $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f'(x) = \left[th\left(\frac{1}{x}\right) - 1\right] \times ch\left(\frac{1}{x}\right)}$

<u>9.</u> On étudie la fonction $\varphi : t \longmapsto th(t) - t$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

Elle est dérivable sur $]0, +\infty[$ et :

$$\forall t > 0,\ \varphi'(t) = 1 - th^2(t) - 1 = -th^2(t) < 0$$

t	0	$+\infty$
φ	0	$\searrow$

On a donc $\forall t > 0,\ \varphi(t) < 0$

donc $\boxed{\forall t > 0,\ th(t) < t}$

<u>10.</u> On a donc $\forall x > 0,\ th\left(\frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}$

Or $\forall x > 0,\ ch\left(\frac{1}{x}\right) > 0$ donc $\forall x > 0,\ f'(x) < 0$

On utilise ensuite la parité de f.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f	1	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	1

<u>11.</u> On a : $\operatorname{sh}(t) \underset{t\to 0}{=} t + \dfrac{t^3}{6} + \dfrac{t^5}{120} + o(t^5)$

donc $\boxed{\dfrac{\operatorname{sh}(t)}{t} \underset{t\to 0}{=} 1 + \dfrac{t^2}{6} + \dfrac{t^4}{120} + o(t^4)}$

<u>12.</u> On a $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{1}{t} = 0$

$$f(x) = \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \underset{x\to+\infty}{=} 1 + \frac{1}{6x^2} + \frac{1}{120x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)$$

<u>13.</u> On a $\lim\limits_{x\to 0^+} f\left(\dfrac{1}{x}\right) = \lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 1$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f\left(\dfrac{1}{x}\right) = \lim\limits_{t\to-\infty} f(t) = 1$

Donc si on pose $F(x) = \begin{cases} f\left(\frac{1}{x}\right) & \text{pour } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

on définit une <u>fonction F continue sur $\mathbb{R}$</u> qui prolonge la fonction $x \in \mathbb{R}^* \longmapsto f\left(\frac{1}{x}\right) \in \mathbb{R}$.

Partie C

14. Pour $xy' + y = 0$

les solutions sur $]0,+\infty[$ sont de la forme $x \mapsto Ce^{-\ln x}$

ie $x \longmapsto \frac{C}{x}$ où $C \in \mathbb{R}$.

On cherche une solution particulière de $xy' + y = ch(x)$

sur $]0,+\infty[$ par variation de la constante :

$$y(x) = \frac{C(x)}{x} \quad \text{où } C \text{ dérivable sur }]0,+\infty[.$$

On a $\forall x > 0, \quad x \times \frac{C'(x)}{x} + \dots = ch(x)$

On peut donc choisir $\forall x > 0, C(x) = sh(x)$

On a donc $\forall x > 0, \ y(x) = \frac{sh(x)}{x}$

Les solutions de (E) sur $]0,+\infty[$ sont donc les fonctions

$$x \longmapsto \frac{C + sh(x)}{x} \quad \text{où } C \in \mathbb{R}.$$

15. Les solutions de (E) sur $]-\infty, 0[$ sont les fonctions

$$x \longmapsto \frac{D + sh(x)}{x} \quad \text{où } D \in \mathbb{R}$$

16. $F(x) = \begin{cases} \frac{sh(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

donc F est solution de (E) sur $]0,+\infty[$ et sur $]-\infty,0[$ (avec $C=D=0$).

De plus : $0\times F'(0)+F(0)=1=\text{ch}(0)$

donc <u>F est solution de (E) sur $\mathbb{R}$.</u>

Soit G une solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

Elle est donc solution de (E) sur $]-\infty,0[$ et sur $]0,+\infty[$

donc il existe deux réels C et D tels que :

$$G(x)=\begin{cases} \dfrac{C+\text{sh}\,x}{x} & \text{si } x>0 \\ \dfrac{D+\text{sh}\,x}{x} & \text{si } x<0 \\ G(0) & \text{si } x=0 \end{cases}$$

et G doit être continue en 0 (car dérivable en 0)

or $\text{sh}\,x \underset{x\to 0}{\sim} x$ donc $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{sh}\,x}{x}=1$

pour avoir $\lim\limits_{x\to 0^+} G(x)$ finie il est donc nécessaire que $C=0$.

Et de même $D=0$

On a alors $G(0^+)=G(0^-)=1$

et comme G continue en 0 : $G(0)=1$

On a donc $\forall x \in \mathbb{R},\ G(x) = F(x)$.

Ainsi <u>F est l'unique solution de (E) sur $\mathbb{R}$.</u>

<u>Partie D</u>

<u>17.</u> On a vu à la partie B que f est continue et strictement décroissante sur $]0, +\infty[$.

D'après le théorème de la bijection monotone, f est bijective de $]0, +\infty[$ vers $f(]0,+\infty[) =]1, +\infty[$.

On a $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{n+1}{n} \in]1, +\infty[$.

Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \exists!\, u_n \in]0, +\infty[\ ;\ f(u_n) = \frac{n+1}{n}}$

<u>19.</u> $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f(u_{n+1}) = \frac{n+2}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1} \leqslant 1 + \frac{1}{n} = f(u_n)$

Comme f est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} \geqslant u_n$$

Donc $\boxed{(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ est croissante.}}$

<u>20.</u> On note g la fonction réciproque la restriction de f à $]0, +\infty[$.

On a donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = g\left(\frac{n+1}{n}\right)$

On a $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n+1}{n} = 1$

De plus $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$ donne $\lim\limits_{x \to 1} g(x) = +\infty$

On a donc $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty}$

21. On a vu à la partie B que :

$$f(x) \underset{x \to +\infty}{=} 1 + \frac{1}{6x^2} + \frac{1}{120x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)$$

Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

On a : $$f(u_n) = \frac{n+1}{n} \underset{n \to +\infty}{=} 1 + \frac{1}{6u_n^2} + \frac{1}{120u_n^4} + o\left(\frac{1}{u_n^4}\right)$$

donc $$\frac{1}{n} \underset{n \to +\infty}{=} \frac{1}{6u_n^2} + o\left(\frac{1}{u_n^2}\right)$$

donc $$\frac{1}{6u_n^2} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$ donc $$u_n^2 \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{n}{6}$$

donc $$|u_n| \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{n}{6}}$$

Comme $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\boxed{u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{n}{6}}}$

Partie E

22. $\forall x \in \mathbb{R},\ 2.sh(x).ch(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \times (e^x + e^{-x})$

$$= \frac{1}{2}(e^{2x} - e^{-2x}) = \boxed{sh(2x)}$$

23. La fonction f est continue sur $]0,+\infty[$.

D'après le théorème fondamental de l'analyse la fonction $x \overset{\Psi}{\longmapsto} \int_1^x f(t)\,dt$ est définie et dérivable sur $]0,+\infty[$ avec $\forall x>0,\ \Psi'(x) = f(x)$.

On a $J(x) = \Psi(x) - \Psi(x/2)$

donc J est elle aussi <u>définie et dérivable sur $]0,+\infty[$</u>

De plus :

$$\forall x>0,\ J'(x) = \Psi'(x) - \frac{1}{2}.\Psi'\left(\frac{x}{2}\right) = f(x) - \frac{1}{2}.f\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$= x.sh\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{x}{4}.sh\left(\frac{2}{x}\right)$$

Avec la formule précédente : $sh\left(\frac{2}{x}\right) = 2.sh\left(\frac{1}{x}\right).ch\left(\frac{1}{x}\right)$

Donc $\forall x>0,\ J'(x) = x.sh\left(\frac{1}{x}\right) \times \left[1 - \frac{1}{2}ch\left(\frac{1}{x}\right)\right]$

donc $\boxed{\forall x>0,\ J'(x) = f(x) \times \left[1 - \frac{1}{2}ch\left(\frac{1}{x}\right)\right]}$

24. On a $\forall x > 0$, $f'(x) > 0$.

Pour $x > 0$: $J'(x) = 0 \iff \operatorname{ch}\left(\frac{1}{x}\right) = 2$

$$\iff e^{1/x} + e^{-1/x} = 4$$

$$\iff e^{2/x} - 4e^{1/x} + 1 = 0$$

$$\iff e^{1/x} \text{ solution de } z^2 - 4z + 1 = 0$$

Mais pour $z^2 - 4z + 1 = 0$ le discriminant est $\Delta = 16 - 4 = 12$

donc $z = \frac{4 \pm \sqrt{12}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}$

Les deux solutions sont > 0.

Donc $J'(x) = 0 \iff \frac{1}{x} = \ln(2 \pm \sqrt{3})$

$$\iff x = \frac{1}{\ln(2 \pm \sqrt{3})}$$

Mais $\sqrt{3} > 1$ donc $2 - \sqrt{3} < 1$ donc $\ln(2 - \sqrt{3}) < 0$

Donc pour $x > 0$: $J'(x) = 0 \iff x = \frac{1}{\ln(2+\sqrt{3})}$

et $J'(x) > 0 \iff \operatorname{ch}\left(\frac{1}{x}\right) < 2$

$$\iff \frac{1}{x} < \frac{1}{\ln(2+\sqrt{3})} \quad \text{car ch strict } \nearrow$$

$$\iff x > \frac{1}{\ln(2+\sqrt{3})}$$

x	0		$1/\ln(2+\sqrt{3})$		$+\infty$
$J'(x)$		$-$	0	$+$	

25. (a) Si $x \geq 0$: $e^{-x} \leq 1$

donc $sh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \geq \dfrac{e^x - 1}{2}$

25. (b) Soit $x > 0$.

$\forall t \in \left[\frac{x}{2}, x\right]$, on a $0 < t \leq x$

et comme f strictement décroissante

sur $]0, +\infty[$ on a $f(t) \geq f(x)$

donc $f(t) \geq x . sh\left(\frac{1}{x}\right)$

Avec 25.(a) : $\boxed{\forall t \in \left[\frac{x}{2}, x\right],\ f(t) \geq \frac{x}{2} \cdot \left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right)}$

25. (c) On a donc $J(x) = \displaystyle\int_{x/2}^{x} f(t)\,dt \geq \int_{x/2}^{x} \underbrace{\frac{x}{2}\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right)}_{\text{ne dépend pas de } t} dt$

donc $\boxed{\forall x > 0,\ J(x) \geq \frac{x^2}{4} \cdot \left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right)}$

Par croissances comparées : $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x^2}{4}\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right) = +\infty$

Donc par minoration : $\boxed{\lim\limits_{x \to 0^+} J(x) = +\infty}$

26.(a) Etudions la fonction $\pi : x \longmapsto \operatorname{sh} x - x$ sur $\mathbb{R}^+$. Elle est dérivable et :

$$\forall x \geqslant 0,\quad \pi'(x) = \operatorname{ch} x - 1 \geqslant 0$$

x	0	$+\infty$
π	0	$\nearrow$

donc $\forall x \geqslant 0,\ \pi(x) \geqslant 0$

donc $\boxed{\forall x \geqslant 0,\quad \operatorname{sh}(x) \geqslant x}$

26.(b) Pour $x > 0$ on a donc :

$$\forall t \in \left[\frac{x}{2}, x\right],\quad f(t) \geqslant t \times \frac{1}{t} = 1$$

donc $$J(x) = \int_{x/2}^{x} f(t)\,dt \geqslant \int_{x/2}^{x} 1\,dt$$

Donc $\boxed{\forall x > 0,\quad J(x) \geqslant \frac{x}{2}}$

Par minoration $\boxed{\lim_{x \to +\infty} J(x) = +\infty}$

26.(c) On a vu à la partie A que :

$$\operatorname{sh}(x) \underset{x \to 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

donc $\boxed{\operatorname{sh}(x) - x \underset{x \to 0}{\sim} \frac{x^3}{6}}$

Donc $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{6(\operatorname{sh}x - x)}{x^3} = 1$

Donc au voisinage de 0 : $\dfrac{6(\operatorname{sh}x - x)}{x^3} \leq \dfrac{3}{2}$

Donc $\exists \delta > 0,\ \forall x \in]0, \delta],\quad \operatorname{sh}(x) - x \leq \dfrac{x^3}{4}$

donc $\boxed{\forall x \in]0, \delta],\quad \operatorname{sh}(x) \leq x + \dfrac{x^3}{4}}$

25.(d) On a donc pour $x \geq \dfrac{1}{\delta}$:

$\forall t \in \left[\dfrac{x}{2}, x\right],\quad f(t) \leq 1 + \dfrac{1}{4t^2}$

donc $J(x) \leq \displaystyle\int_{x/2}^{x} \left(1 + \frac{1}{4t^2}\right) dt$

$= \left[t - \dfrac{1}{4t}\right]_{x/2}^{x} = x - \dfrac{1}{4x} - \dfrac{x}{2} + \dfrac{2}{4x}$

donc $\boxed{\forall x \geq \dfrac{1}{\delta},\quad J(x) \leq \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{2x}}$

Avec 26.(b) : $\forall x \geq \dfrac{1}{\delta},\quad 0 \leq J(x) - \dfrac{x}{2} \leq \dfrac{1}{2x}$

donc par encadrement : $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(J(x) - \dfrac{x}{2}\right) = 0$

donc la droite $y = \frac{x}{2}$ est asymptote à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$

et $\mathscr{C}_f$ est au-dessus sur tout l'intervalle $]0, +\infty[$.

2f.