U_1 ①

U_2 ① ②

U_3 ① ② ③

$\vdots$

U_n ① ② . . . ⓝ

$X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,n]\!])$ ie $X(\Omega) = [\![1,n]\!]$

et $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $\mathbb{P}(X=k) = \frac{1}{n}$

On a $\forall \omega \in \Omega$, $1 \leq X(\omega) \leq n$

et $1 \leq Y(\omega) \leq X(\omega)$

donc $\forall \omega \in \Omega$, $1 \leq Y(\omega) \leq n$

Donc $\boxed{Y(\Omega) = [\![1,n]\!]}$.

1. Soit $(i;j) \in [\![1,n]\!]^2$.

$$\mathbb{P}((X=i) \cap (Y=j)) = \mathbb{P}(X=i) \times \mathbb{P}_{(X=i)}(Y=j)$$
$$= \begin{cases} \frac{1}{n} \times \frac{1}{i} & \text{si } j \leq i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On fixe $j \in [\![1,n]\!]$.

Comme $X(\Omega) = [\![1,n]\!]$, les événements $(X=1), (X=2), \dots, (X=n)$ forment un sce.

Donc d'après la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(Y=j) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}((X=i)\cap(Y=j))$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=j}^{n}\frac{1}{i} + \sum_{i=1}^{j-1} 0$$

$$\boxed{\mathbb{P}(Y=j) = \frac{1}{n}\sum_{i=j}^{n}\frac{1}{i} \quad \text{pour tout } j\in[\![1,n]\!]}$$

2. Comme $Y(\Omega)=[\![1,n]\!]$ on a

$$E(Y) = \sum_{j=1}^{n} j.\mathbb{P}(Y=j) = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{j}{n}\sum_{i=j}^{n}\frac{1}{i}\right)$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=j}^{n}\frac{j}{i}\right) \underset{\text{Fubini triangulaire}}{=} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{i}\frac{j}{i}\right)$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{i}\left(\sum_{j=1}^{i} j\right)\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\times\frac{i(i+1)}{2}$$

$$= \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}(i+1) = \frac{1}{2n}\left(\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 1\right)$$

$$= \frac{1}{2n}\left(\frac{n(n+1)}{2}+n\right) = \frac{1}{4}\left(n+1+2\right) = \boxed{\frac{n+3}{4}}$$

Donc $\boxed{E(Y) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{4}}$