$\underline{1.}$ X et Y indépendantes et de loi $\mathcal{U}([\![0,n]\!])$.

On a donc $X(\Omega) = Y(\Omega) = [\![0,n]\!]$

et $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $\mathbb{P}(X=k) = \mathbb{P}(Y=k) = \dfrac{1}{n+1}$

On pose $S \overset{\text{def}}{=} X+Y$.

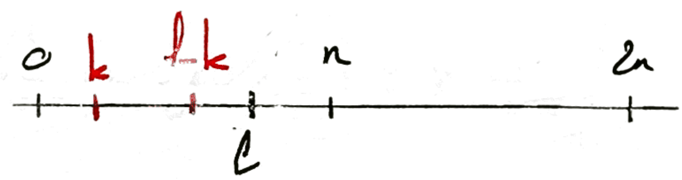
Alors $S(\Omega) = [\![0,2n]\!]$.

Pour tout $\ell \in [\![0,2n]\!]$:

$$\mathbb{P}(S=\ell) = \sum_{k=0}^{\ell} \mathbb{P}\big((X=k)\cap(Y=\ell-k)\big)$$

$$= \sum_{k=0}^{\ell} \mathbb{P}(X=k) \times \mathbb{P}(Y=\ell-k) \quad \text{car } X \text{ et } Y \text{ indépendantes}$$

$\underline{\text{Cas 1}}$ $\ell \in [\![0,n]\!]$



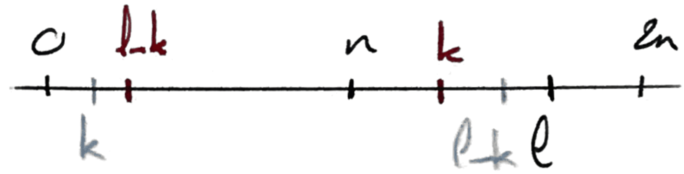
si $k \in [\![0,\ell]\!]$ alors $k \in [\![0,n]\!]$ et $\ell-k \in [\![0,\ell]\!]$

donc $\ell-k \in [\![0,n]\!]$

donc $\mathbb{P}(X=k) = \mathbb{P}(Y=\ell-k) = \dfrac{1}{n+1}$

Donc $\mathbb{P}(S=\ell) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\ell} \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{\ell+1}{(n+1)^2}$

Cas 2 $\ell \in [\![n+1, 2n]\!]$



$$\mathbb{P}(S=\ell) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X=k)\,\mathbb{P}(Y=\ell-k) + \underbrace{\sum_{k=n+1}^{\ell} \underbrace{\mathbb{P}(X=k)}_{=0}\,\mathbb{P}(Y=n-k)}_{=0}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+1} \times \mathbb{P}(Y=\ell-k)$$

on cherche les $k \in [\![0,n]\!]$ tq $0 \leqslant \ell-k \leqslant n$

$\iff -\ell \leqslant -k \leqslant n-\ell$

$\iff \ell-n \leqslant k \leqslant \ell$

$\iff k \in [\![\ell-n, \ell]\!] \cap [\![0,n]\!]$

$\iff k \in [\![\ell-n, n]\!]$

Donc $$\mathbb{P}(S=\ell) = \sum_{k=0}^{\ell-n-1} \frac{1}{n+1} \times 0 + \sum_{k=\ell-n}^{n} \frac{1}{n+1} \times \frac{1}{n+1}$$

$$= \frac{2n-\ell+1}{(n+1)^2}$$

Conclusion : $\forall \ell \in [\![0, 2n]\!]$, $$\mathbb{P}(S=\ell) = \begin{cases} \dfrac{\ell+1}{(n+1)^2} & \text{si } \ell \in [\![0,n]\!] \\ \dfrac{2n-\ell+1}{(n+1)^2} & \text{si } \ell \in [\![n+1, 2n]\!] \end{cases}$$

2. X et Y indépendantes et de loi $\mathcal{U}([\![1,n]\!])$

On a donc $X(\Omega) = Y(\Omega) = [\![1,n]\!]$

et $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $\mathbb{P}(X=k) = \mathbb{P}(Y=k) = \frac{1}{n}$

* On pose $U \overset{def}{=} \min(X,Y)$

Alors $U(\Omega) = [\![1, n]\!]$

Pour tout $l \in [\![1, n]\!]$:

$$(U \geqslant l) = (X \geqslant l) \cap (Y \geqslant l)$$

donc $\mathbb{P}(U \geqslant l) = \mathbb{P}(X \geqslant l) \times \mathbb{P}(Y \geqslant l)$ car $X \perp\!\!\!\perp Y$

Or $\mathbb{P}(X \geqslant l) = \sum_{k=l}^{n} \mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=l}^{n} \frac{1}{n} = \frac{n-l+1}{n}$

et $\mathbb{P}(Y \geqslant l) = \frac{n-l+1}{n}$

Donc $\mathbb{P}(U \geqslant l) = \frac{(n-l+1)^2}{n^2} = \left(1 - \frac{l-1}{n}\right)^2$

On a alors :

$\forall l \in [\![1,n]\!]$, $\mathbb{P}(U=l) = \mathbb{P}(U \geqslant l) - \mathbb{P}(U \geqslant l+1)$

Comme $1 \leqslant l \leqslant n$: $\mathbb{P}(U \geqslant l) = \left(1 - \frac{l-1}{n}\right)^2$

si $1 \leqslant \ell+1 \leqslant n$: $\mathbb{P}(U \geqslant \ell+1) = \left(1-\frac{\ell}{n}\right)^2$

c'est vrai si $\ell \in [\![1,n]\!] \cap [\![0,n-1]\!]$ ie $\ell \in [\![1,n-1]\!]$

On a donc :

$$\forall \ell \in [\![1,n-1]\!], \quad \mathbb{P}(U=\ell) = \left(1-\frac{\ell-1}{n}\right)^2 - \left(1-\frac{\ell}{n}\right)^2$$

Cas particulier :

$$\mathbb{P}(U=n) = \mathbb{P}(U \geqslant n) - \underbrace{\mathbb{P}(U \geqslant n+1)}_{=0}$$

$$= \mathbb{P}(U \geqslant n) = \left(1-\frac{n-1}{n}\right)^2$$ On retrouve le cas général.

Donc $$\boxed{\forall \ell \in [\![1,n]\!], \quad \mathbb{P}(U=n) = \left(1-\frac{\ell-1}{n}\right)^2 - \left(1-\frac{\ell}{n}\right)^2 = \frac{2(n-\ell)+1}{n^2}}$$

* On pose $V = \max(X,Y)$.
Alors $V(\Omega) = [\![1,n]\!]$.

Pour tout $\ell \in [\![1,n]\!]$:

$$(V \leqslant \ell) = (X \leqslant \ell) \cap (Y \leqslant \ell)$$

donc $\mathbb{P}(V \leqslant \ell) = \mathbb{P}(X \leqslant \ell) \times \mathbb{P}(Y \leqslant \ell)$ car $X \perp\!\!\!\perp Y$

Or $\mathbb{P}(X \leqslant \ell) = \sum_{k=1}^{\ell} \mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=1}^{\ell} \frac{1}{n} = \frac{\ell}{n}$

et $\mathbb{P}(Y \leqslant \ell) = \frac{\ell}{n}$

Donc $\mathbb{P}(V \leqslant \ell) = \frac{\ell^2}{n^2}$

On a alors :

$\forall \ell \in [\![1,n]\!],\ \mathbb{P}(V=\ell) = \mathbb{P}(V \leqslant \ell) - \mathbb{P}(V \leqslant \ell-1)$

Comme $1 \leqslant \ell \leqslant n$: $\mathbb{P}(V \leqslant \ell) = \frac{\ell^2}{n^2}$

Si $1 \leqslant \ell - 1 \leqslant n$: $\mathbb{P}(V \leqslant \ell - 1) = \frac{(\ell-1)^2}{n^2}$

c'est vrai si $\ell \in [\![2,n+1]\!] \cap [\![1,n]\!]$ ie $\ell \in [\![2,n]\!]$

On a donc :

$\forall \ell \in [\![2,n]\!],\ \mathbb{P}(V=\ell) = \frac{\ell^2}{n^2} - \frac{(\ell-1)^2}{n^2} = \frac{2\ell-1}{n^2}$

Cas particulier :

$\mathbb{P}(V=1) = \mathbb{P}(V \leqslant 1) - \underbrace{\mathbb{P}(V \leqslant 0)}_{=0} = \mathbb{P}(V \leqslant 1) = \frac{1}{n^2}$

on retrouve le cas général

Donc $\boxed{\forall \ell \in [\![1,n]\!],\ \mathbb{P}(V=\ell) = \frac{2\ell-1}{n^2}}$