Urne de N boules : r boules rouges
b boules blanches

On pioche successivement une boule et après chaque tirage, on la remet avec c boules de la même couleur.

Par exemple si on commence par piocher une boule rouge on la remet avec c boules rouges. On a donc $N+c$ boules dans l'urne : $r+c$ boules rouges et b boules blanches. Etc....

Pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$X_n =$ "nombre de boules rouges tirées lors des n premiers tirages"

$Y_n = \begin{cases} 1 & \text{si le } n\text{-ième tirage donne une boule rouge} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$R_n =$ "le n-ième tirage donne une boule rouge"

donc $Y_n = \mathbb{1}_{R_n}$

1. Y_1 suit une loi de Bernoulli de paramètre $\mathbb{P}(R_1)$.

Or $\mathbb{P}(R_1) = \frac{r}{N}$ Donc $Y_1 \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{r}{N}\right)$

2. Comme Y_{n+1} suit une loi de Bernoulli :

$$\mathbb{E}(Y_{n+1}) = \mathbb{P}(Y_{n+1} = 1) = \mathbb{P}(R_{n+1})$$

$X_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$ donc d'après la formule des probabilités totales appliquée avec le sce $((X_n = k))_{0 \leqslant k \leqslant n}$:

$$\mathbb{P}(R_{n+1}) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(R_{n+1} \cap (X_n = k))$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X_n = k) \times \mathbb{P}_{(X_n = k)}(R_{n+1})$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X_n = k) \times \frac{r + kc}{N + nc}$$

$$= \frac{r}{N+nc} \cdot \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X_n = k) + \frac{c}{N+nc} \sum_{k=0}^{n} k\,\mathbb{P}(X_n = k)$$

$$= \frac{r}{N+nc} \times 1 + \frac{c}{N+nc} \mathbb{E}(X_n)$$

Finalement $\boxed{\mathbb{E}(Y_{n+1}) = \frac{r + c \cdot \mathbb{E}(X_n)}{N + nc}}$

3. Pour tout $\omega \in \Omega$:

$X_n(\omega) =$ nb de boules rouges tirées lors des n premiers tirages

$= Y_1(\omega) + Y_2(\omega) + \dots + Y_n(\omega)$

Donc $\boxed{X_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k}$

4. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on note H_n le prédicat "$\mathbb{E}(Y_n) = \frac{r}{N}$"

Pour $n=1$ on a vu au 1. que H_1 est vrai.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ pour lequel $H_1, \dots, H_n$ sont vrais.

On a $\mathbb{E}(Y_{n+1}) = \dfrac{r + c \cdot \mathbb{E}(X_n)}{N + nc}$

Par linéarité de l'espérance $\mathbb{E}(X_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(Y_k)$

$= \sum_{k=1}^{n} \frac{r}{N} = \frac{nr}{N}$

Donc $\mathbb{E}(Y_{n+1}) = \dfrac{r + c\frac{nr}{N}}{N + nc} = \dfrac{r(N+nc)}{N(N+nc)} = \dfrac{r}{N}$

Donc H_{n+1} est vrai

D'après le principe de récurrence forte :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{E}(Y_n) = \frac{r}{N}$$

Or pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, Y_n suit une loi de Bernoulli

donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, Y_n \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{r}{N}\right)}$

4. On a donc par linéarité de l'espérance :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{E}(X_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(Y_k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{r}{N} = \boxed{\frac{nr}{N}}$$

En moyenne ~~sur~~ au cours des n premiers tirages on obtient $\frac{nr}{N}$ boules rouges.

Il est remarquable que cette moyenne ne dépend pas du paramètre c.