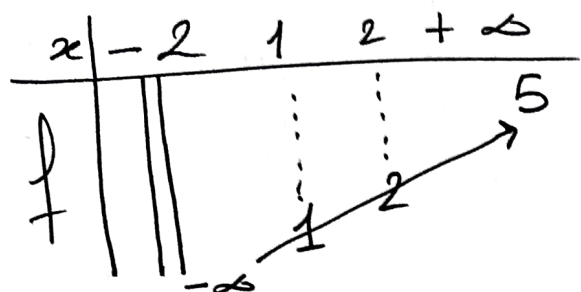


TD6 Ex 21

1.(a) On étudie $f: x \mapsto \frac{5x-2}{x+2}$ sur l'intervalle $]-2, +\infty[$. ①

f est dérivable comme quotient de fonctions qui le sont.

$$\forall x > -2, f'(x) = \frac{12}{(x+2)^2} > 0$$



Point(s) fixe(s): si $x > -2$
 $f(x) = x \iff 5x - 2 = x(x+2)$
 $\iff x^2 - 3x + 2 = 0$
 $\iff x = 1 \text{ or } 2$

Donc si $x > 1$ alors $f(x) > 1$.

L'intervalle $]1, +\infty[$ est donc f -stable.

On a $u_0 = 0$ donc $u_1 = -1$ donc $u_2 = -7$ donc $u_3 = \frac{37}{5} > 1$

Comme $u_3 \in]1, +\infty[$ on en déduit par théorème que

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie et que $\forall n \geq 3, u_n > 1$

En particulier: $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \neq 1$

Donc $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est elle aussi bien définie

1.(b) Pour $n \in \mathbb{N}$:
$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 2}{u_{n+1} - 1} = \frac{\frac{5u_n - 2}{u_n + 2} - 2}{\frac{5u_n - 2}{u_n + 2} - 1} = \frac{3u_n - 6}{4u_n - 4} = \frac{3}{4} v_n$$

Donc $(v_n)_{n \geq 0}$ est une suite géométrique de raison $\frac{3}{4}$

1.(c) Donc $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n v_0 = \left(\frac{3}{4}\right)^n \times 2$

(2)

Mais $v_n = \frac{u_n - 2}{u_n - 1} \iff v_n \cdot u_n - v_n = u_n - 2$

$\iff u_n \cdot (v_n - 1) = v_n - 2$

$\iff u_n = \frac{v_n - 2}{v_n - 1}$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2 \cdot \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n - 1}{\left(\frac{3}{4}\right)^n \cdot 2 - 1}$

et $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 2$

2.(a) On pose $f(x) = \frac{x}{2x+1}$. Si $x > 0$ alors $f(x) > 0$ donc

l'intervalle $]0; +\infty[$ est f -stable.

Comme $u_0 > 0$ on peut en déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie et que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$

2.(b) $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \neq 0$ donc $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie.

$\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{u_n} = 2 + v_n$

Donc $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison 2.

2.(c) Donc $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = 2n + v_0 = 2n + \frac{1}{u_0}$

$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{1}{v_n} = \frac{u_0}{1 + 2nu_0}$

$u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.