1.(a) On étudie $f : x \longmapsto \dfrac{5x-2}{x+2}$ sur l'intervalle $]-2,+\infty[$.

f est dérivable comme quotients de fonctions qui le sont.

$$\forall x>-2,\ f'(x) = \frac{12}{(x+2)^2} > 0$$

x	-2	1	2	$+\infty$
f	$\Vert$ $-\infty$	1	2	5

Point(s) fixe(s) : si $x>-2$

$$f(x)=x \iff 5x-2 = x(x+2)$$
$$\iff x^2-3x+2=0$$
$$\iff x=1 \text{ ou } 2$$

Donc si $x>1$ alors $f(x)>1$.

L'intervalle $]1,+\infty[$ est donc f-stable.

On a $u_0=0$ donc $u_1=-1$ donc $u_2=-7$ donc $u_3=\dfrac{37}{5}>1$

Comme $u_3 \in]1,+\infty[$ on en déduit par théorème que $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bien définie}}$ et que $\boxed{\forall n\geq 3,\ u_n>1}$

En particulier : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n\neq 1$

Donc $\boxed{(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est elle aussi bien définie}}$

1.(b) Pour $n\in\mathbb{N}$: $v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1}-2}{u_{n+1}-1} = \dfrac{\frac{5u_n-2}{u_n+2}-2}{\frac{5u_n-2}{u_n+2}-1} = \dfrac{3u_n-6}{4u_n-4} = \dfrac{3}{4}v_n$

Donc $\boxed{(v_n)_{n\geq 0} \text{ est une suite géométrique de raison } \frac{3}{4}}$

1.(c) Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n \times v_0 = \left(\frac{3}{4}\right)^n \times 2$

Mais $v_n = \frac{u_n - 2}{u_n - 1} \iff v_n . u_n - v_n = u_n - 2$

$\iff u_n . (v_n - 1) = v_n - 2$

$\iff u_n = \frac{v_n - 2}{v_n - 1}$

Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \ u_n = \frac{2 . \left(\frac{3}{4}\right)^n - 1}{\left(\frac{3}{4}\right)^n . 2 - 1}}$ et $\boxed{u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 2}$

2.(a) On pose $f(x) = \frac{x}{2x+1}$. Si $x > 0$ alors $f(x) > 0$ donc l'intervalle $]0, +\infty[$ est f-stable.

Comme $u_0 > 0$ on peut en déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie et que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \ u_n > 0}$

2.(b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq 0$ donc $\boxed{(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bien définie}}$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \frac{2u_n + 1}{u_n} = 2 + v_n$

Donc $\boxed{(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est une suite arithmétique de raison } 2}$.

2.(c) Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = 2n + v_0 = 2n + \frac{1}{u_0}$

$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \ u_n = \frac{1}{v_n} = \frac{u_0}{1 + 2n u_0}}$

$\boxed{u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0}$ donc $\boxed{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est convergente}}$.