TD6 Ex23

1. (u_n) arithmétique. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_8 - 3(n-8) = 34 - 3n$

2. (u_n) géométrique. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_5 \cdot (\sqrt{2})^{n-5} = {}^{(n-1)/2} = (\sqrt{2})^{n-1}$

3. (u_n) arithmético-géométrique point fixe $\ell = -1$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, si $v_n = u_n + 1$ alors $v_{n+1} = 2 v_n$

donc (v_n) est géométrique.

$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = 2^{n-11} \cdot v_{11} = 2^{n-11} \times 31$

donc $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2^{n-11} \times 31 - 1$

4. Même démarche qu'au 3. et on trouve $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 3 \times (-1)^{n+1} + 1$

5. Par récurrence immédiate : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$.

Si on pose $v_n = \ln(u_n)$ alors $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = 1 + \frac{1}{2} v_n$

donc (v_n) est arithmético-géométrique.

On trouve $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \frac{1}{2^n} \cdot \ln(u_0) + 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$

donc $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0^{1/2^n} \times e^{2 - 1/2^{n-1}}$

6. (u_n) est géométrique. $\forall n \in \mathbb{N}\ u_n = (-1)^{n+1} = (-1)^{n-1}$

7. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = (-1)^{n+1} \cdot u_{n+1} = (-1)^{n+1} \times (-1)^n \cdot u_n = -u_n$

donc (u_n) suite récurrente linéaire d'ordre 2.

Équation caractéristique : $z^2 = -1$ donc $\Delta < 0$ et $z = \pm i = e^{\pm i\pi/2}$

Donc $\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \left(\lambda \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) + \mu \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right) \times 1^n$

Avec $u_0 = 1$ et $u_1 = (-1)^0 u_0 = 1$ on trouve :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{2}.\cos\left(n\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$

8. De même $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{1}{4}\left[(-1)^n + 3^{n+1}\right]$

9. De même $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (1-n)2^n$

10. De même $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \cos\left(n\frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)$

11. Cette fois l'équation caractéristique est $z^2 - 2z + 5 = 0$

$\Delta = -16 < 0$ et $z = 1 \pm 2i = \sqrt{5}e^{i\alpha}$

où $\alpha \in [0, 2\pi[$ vérifie $\begin{cases} \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}} \end{cases}$

Comme $\cos\alpha > 0$ et $\sin\alpha > 0$ on a $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

et $\alpha = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \arcsin\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$

On trouve alors $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n = d.\, 5^{n/2}.\sin\left(n.\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\right)$

où d qcq dans $\mathbb{R}$ (car u_1 inconnu).

12. Suite de Fibonacci initialisée à $u_0 = u_1 = 1$.

On trouve $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{5+\sqrt{5}}{10} \times \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5-\sqrt{5}}{10} \times \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$

13. Par récurrence immédiate $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$ donc $v_n = \ln(u_n)$ existe.

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+2} - 4v_{n+1} + 4v_n = 0$ et $v_0 = 0, v_1 = 4$

On trouve $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = n2^{n+1}$

puis $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = e^{n2^{n+1}}$

14. Si on pose $v_n = \dfrac{u_n}{n!}$ alors $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = v_n + 1$

et $v_0 = u_0 = 1$

donc $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = n+1$ puis $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (n+1)!$