Ex 24 du TD6

1. $u_n = n^2 - 2n$ c'est un polynôme en n donc $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n^2}$

2. Par encadrement : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sin n}{\sqrt{n}} = 0$

donc : $\sin(n) \underset{n\to+\infty}{=} o(\sqrt{n})$

D'après les croissances comparées : $\ln(n)^{12} \underset{n\to+\infty}{=} o(\sqrt{n})$

donc $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \sqrt{n} + o(\sqrt{n})$ donc $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n}}$

3. D'après les croissances comparées : $n^2 \underset{n\to+\infty}{=} o(2^n)$

donc $u_n \underset{n\to+\infty}{=} 2^n + o(2^n)$ donc $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2^n}$

4. On a $n+1 \underset{n\to+\infty}{\sim} n$ donc $\sqrt{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n}$

On conjecture que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\sqrt{n}$:

$$\frac{u_n}{2\sqrt{n}} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} + 1\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2}(1+1) = 1$$

ceci prouve que $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\sqrt{n}}$

5 $u_n = \sqrt{n} \times \left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} - 1 \right)$

or on sait que $\sqrt{1+\frac{1}{n}} - 1 = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}} - 1 \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{2n}$

puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$

D'autre part $\sqrt{n} \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{n}$ par réflexivité.

Donc $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{n}}{2n}$ par produit.

Donc $\boxed{u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{n}}}$

6 On a par quotient de polynômes en n : $\frac{n+1}{n^2} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n+1}{n^2} = 0$

On sait donc que $\sin\left(\frac{n+1}{n^2}\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{n+1}{n^2}$

Par transitivité : $\boxed{u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{n}}$

7 Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$ on peut dire que $\sin\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$

et $e^{\frac{1}{n}} - 1 \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$. Par quotient : $\boxed{u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} 1}$

8) De même $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ donne $\cos\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$

et $1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$

Et $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ donne $e^{\frac{1}{n^2}} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$

Par quotient : $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}}$

9) $u_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$

Comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ on sait que $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}}$

10) Comme $\ln(n+1) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$ (voir exercice du cours)

on conjecture que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\ln n$

On a $\frac{u_n}{2\ln n} = \frac{\ln\left(n \times \left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) + \ln n}{2\ln n} = 1 + \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{2\ln n}$

$\xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 + \frac{0}{+\infty} = 1$

donc $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\ln(n)}$

(11) Par quotient de polynômes en n : $\dfrac{n^2+1}{n(n+1)} \underset{n \to +\infty}{\sim} 1$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n^2+1}{n(n+1)} = 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{n^2+1}{n(n+1)} - 1 \right) = 0$

On sait donc que $u_n = \ln\left(1 + \left(\dfrac{n^2+1}{n(n+1)} - 1\right)\right)$

$$\underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{n^2+1}{n(n+1)} - 1$$

Mais $\dfrac{n^2+1}{n(n+1)} - 1 = \dfrac{1-n}{n(n+1)} \underset{n \to +\infty}{\sim} -\dfrac{1}{n}$

Par transitivité : $\boxed{u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} -\dfrac{1}{n}}$