Chapitre 1

Notions élémentaires de logique et de théorie des ensembles

Sommaire

1 Notations

Traditionnellement, les objets mathématiques (nombres, fonctions...) sont notés avec une lettre de l'alphabet pouvant être minuscule, majuscule, capitale etc...
Lorsqu'on se donne une liste de n objets on utilise un indice : $x_1, x_2, \dots, x_n$.
On peut aussi utiliser un indice supérieur, placé entre parenthèses pour ne pas le confondre avec la puissance : $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}$.
Lorsqu'on considère un tableau de nombres, on a recourt au double-indiçage : $x_{i,j}$ désigne l'élément situé à l'intersection de la ligne i et de la colonne j.

Pour varier les notations, on utilise aussi l'aplhabet grec, dont nous rappelons ci-dessous les minuscules et majuscules. Il est impératif de bien le connaitre (sous peine de faire sourire son examinateur à l'oral).

Minuscule	Majuscule	Nom
α	A	Alpha
β	B	Bêta
γ	Γ	Gamma
δ	Δ	Delta
ϵ	E	Epsilon
ζ	Z	Dzéta
η	H	Êta
θ	Θ	Thêta
ι	I	Iota
κ	K	Kappa
λ	Λ	Lambda
μ	M	Mu

Minuscule	Majuscule	Nom
ν	N	Nu
ξ	Ξ	Xi
o	O	Omicron
π	Π	Pi
ρ	P	Rhô
σ	Σ	Sigma
τ	T	Tau
υ	Υ	Upsilon
φ	Φ	Phi
χ	X	Chi
ψ	Ψ	Psi
ω	Ω	Omega

On utilisera aussi les abréviations suivantes :
- cqfd = ce qu'il fallait démontrer :
- ie = id est = c'est-à-dire ;
- p/r = par rapport à ;
- resp. = respectivement.

Ce cours de mathématiques est organisé selon une série de **définitions**, signalées par un cadre vert et par une série de **théorèmes** signalés par un cadre rouge.
Le tout est illustré par des exemples et des exercices, ces derniers étant signalés par un crayon à papier. Certains chapitres comportent des explications sur la manière de rédiger ; celles-ci sont elles aussi en italique.

Le mot **théorème** est réservé à des résultats mathématiques jugés importants. Dans le cas d'un théorème « facile », on utilise le mot **proposition**. Parfois, on reformule certains théorèmes dans des cas simples, directement utilisables en pratiques : on parle alors de **corollaire**. Enfin certaines démonstrations plus ardues que les autres nécessiteront de démontrer des petites propositions intermédiaires appelées **lemmes**.

2 Logique

2.1 Prédicats et opérations sur les prédicats

Un **prédicat** (ou une **assertion**) est un énoncé mathématique qui est soit **juste**, soit **faux**. On dit qu'un prédicat ne peut prendre que **deux valeurs logiques** : V ou F (i.e. Vrai ou Faux).

Par convention, lorsqu'on énonce un prédicat, on sous-entend toujours qu'il est vrai.

***Exemple* :** « La fonction f est croissante sur l'intervalle I. »

Soient A et B deux prédicats. On définit les opérations suivantes.

- **Négation.** La *négation* (ou *contraire*) de A est notée $non(A)$. Elle est définie par la **table de vérité** suivante :

A	$non(A)$
V	F
F	V

On voit facilement que $non(non(A))$ et A prennent les mêmes valeurs dans la table de vérité.

- **« Et ».** Le prédicat $\left(A\ et\ B\right)$ est défini par :

A	B	$A\ et\ B$
V	V	V
F	V	F
V	F	F
F	F	F

On voit facilement que $\left(A\ et\ B\right)$ et $\left(B\ et\ A\right)$ prennent les mêmes valeurs dans la table de vérité.

- **« Ou ».** Le prédicat $\left(A\ \ ou\ \ B\right)$ est défini par :

A	B	$A\ ou\ B$
V	V	V
F	V	V
V	F	V
F	F	F

On voit facilement que $\left(A\ ou\ B\right)$ et $\left(B\ ou\ A\right)$ prennent les mêmes valeurs dans la table de vérité.

Remarquons qu'il s'agit d'un « ou » *inclusif*, c'est-à-dire que les deux prédicats peuvent être vrais en même temps (contrairement au « ou » exclusif).

Proposition 1 – Lois de Morgan

1. Les prédicats $non(A \ \ et \ \ B)$ et $\big(non(A) \ \ ou \ \ non(B)\big)$ prennent les mêmes valeurs dans une table de vérité.
2. Les prédicats $non(A \ \ ou \ \ B)$ et $\big(non(A) \ \ et \ \ non(B)\big)$ prennent les mêmes valeurs dans une table de vérité.

2.2 Implication et équivalence

- **Implication :** Le prédicat $A \Longrightarrow B$ est défini par :

A	B	$A \Longrightarrow B$
V	V	V
F	V	V
V	F	F
F	F	V

En français, on traduit le prédicat $A \Longrightarrow B$ par :

⋆ **si** A est vrai **alors** B est vrai ;

⋆ pour que A soit vrai **il faut que** B soit vrai ;

⋆ pour que B soit vrai **il suffit** que A soit vrai.

On dit aussi que :

⋆ A est une **condition suffisante** pour B ;

⋆ B est une **condition nécessaire** pour A.

✎ ***Exemple.*** On pose A = « Paul est en Sup1 » et B = « Paul est en PCSI ». Il est clair que $A \Longrightarrow B$ est vrai. Par contre on n'a pas $B \Longrightarrow A$ (Paul est peut-être en Sup2). Dans ce cas, on dit que la **réciproque** de l'implication $A \Longrightarrow B$ est fausse. On peut donc dire :

⋆ « pour que Paul soit en Sup1, il faut qu'il soit en PCSI »

⋆ « pour que le Paul soit en PCSI, il suffit qu'il soit en Sup1 ».

⚠ On ne peut pas dire « pour que Paul soit en PCSI, il faut qu'il soit en Sup1 ».

Rédaction. *Pour montrer que $A \Longrightarrow B$, on doit procèder de la façon suivante : on suppose que le prédicat A est vrai ; on doit alors montrer que B est vrai.*

✎ ***Exemple.*** Soit n un entier naturel. Montrer que : 6 divise $n \Longrightarrow 3$ divise n.

Proposition 2 – Raisonnement par contraposée

Les prédicats $A \Longrightarrow B$ et $non(B) \Longrightarrow non(A)$ prennent les mêmes valeurs dans une table de vérité.

Pour montrer que $A \Longrightarrow B$, on peut donc à la place montrer que $non(B) \Longrightarrow non(A)$: cela s'appelle le *raisonnement par contraposée*. Il est parfois beaucoup plus simple que le raisonnement « direct ».

✎ ***Exemple.*** Soit n un entier naturel. En raisonnant par contraposée, montrer que :
n^2 est pair $\Longrightarrow n$ est pair.

Proposition 3 – Négation d'une implication

Les prédicats $A \Longrightarrow B$ et $\Big(non(A)\ \ ou\ \ B\Big)$ prennent les mêmes valeurs dans une table de vérité. La négation de $A \Longrightarrow B$ est donc $\Big(A\ \ et\ \ non(B)\Big)$.

Pour montrer qu'une implication est fausse, on montre donc que A est vraie et que B est fausse.

✎ ***Exemple.*** Donner une valeur de l'entier naturel n, pour laquelle la réciproque de $\Big(6 \text{ divise } n \Longrightarrow 3 \text{ divise } n\Big)$ est fausse.

⚠ Pour une implication ne pas confondre sa *réciproque*, sa *contraposée* et son *contraire* (= *négation*).

✎ ***Exemple.*** Donner la réciproque, la contraposée et le contraire de l'implication « Paul est en PCSI » $\Longrightarrow$ « Paul est en Sup1 ».

- **Équivalence :** Le prédicat $A \Longleftrightarrow B$ est défini par :

A	B	$A \Longleftrightarrow B$
V	V	V
F	V	F
V	F	F
F	F	V

Il est clair que les prédicats $A \Longleftrightarrow B$ et $B \Longleftrightarrow A$ prennent les mêmes valeurs dans une table de vérité.

En français, on traduit la proposition $A \Longleftrightarrow B$ par :

- ⋆ A est vrai **si et seulement si = (ssi)** B est vrai ;
- ⋆ pour que A soit vrai **il faut et il suffit que** B soit vrai.

On dit aussi que B est une **condition nécessaire et suffisante** pour A.

Proposition 4 – Double implication

Les prédicats $A \Longleftrightarrow B$ et $\Big((A \Longrightarrow B)\ \ et\ \ (B \Longrightarrow A)\Big)$ prennent les mêmes valeurs dans une table de vérité.

Pour montrer qu'une équivalence est vraie on raisonne donc généralement par **double implication** : on montre que $A \Longrightarrow B$ est vrai puis que *la réciproque* $B \Longrightarrow A$ l'est aussi.

Rédaction. *Pour montrer que $A \Longleftrightarrow B$, on procède par double implication.*

$\boxed{\Rightarrow}$ *On suppose que le prédicat A est vrai; on doit alors montrer que B est vrai. On en déduit que $A \Longrightarrow B$.*

$\boxed{\Leftarrow}$ *On suppose que le prédicat B est vrai; on doit alors montrer que A est vrai. On en déduit que $B \Longrightarrow A$.*

On peut alors conclure que $A \Longleftrightarrow B$.

✎ ***Exemple.*** Soit n un entier naturel. Montrer que : n^2 est pair $\Longleftrightarrow$ n est pair.

2.3 Autres types de raisonnement

• **Raisonnement par l'absurde**. Pour montrer qu'un prédicat A est vrai, on peut choisir de raisonner par l'absurde : on suppose que A est faux, et on essaye d'aboutir à une contradiction évidente du type $2 < 1$ ou $0 < x < 0$ etc...

✎ ***Exemple.*** Montrer que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel.

⚠ Ne pas confondre avec le raisonnement par contraposée qui sert à prouver une implication.

• **Raisonnement par disjonction de cas**. Pour montrer qu'un prédicat A est vrai, on peut choisir de le montrer dans différents cas particuliers plus simples, à condition que l'union de tous ces cas particuliers redonne le cas général. Il est préférable que ces différents cas soient disjoints, mais ce n'est pas une obligation.

✎ ***Exemple.*** Montrer que si n est un entier naturel alors $\dfrac{n(n+1)}{2}$ en est un aussi.

• **Raisonnement par analyse-synthèse**. Le raisonnement par analyse-synthèse permet de déterminer toutes les solutions d'un problème.
La partie *analyse* consiste à raisonner sur une hypothétique solution au problème (on suppose donc qu'il en existe au moins une). On accumule alors des déductions de propriétés qu'elle doit vérifier, du seul fait qu'elle est solution.
La partie *synthèse* consiste à examiner tous les objets vérifiant les conditions nécessaires précédemment accumulées (ce sont les seuls candidats pouvant être des solutions) et on détermine, parmi eux, lesquels sont réellement des solutions.

✎ ***Exemple.*** Résoudre l'équation $x^2 + x + 1 = 0$ par analyse-synthèse.

2.4 Raisonnements par récurrence

Soit $P(n)$ un prédicat qui dépend d'un entier naturel n.

✎ ***Exemple.*** $P(n)$ = « 6 divise n » ou $P(n)$ = « 3 divise 2^n ».

On se donne aussi un entier naturel $n_0 \in \mathbb{N}$ fixé, et on souhaite démontrer que $P(n)$ est vraie pour tout les entiers naturels n supérieurs ou égaux à n_0.

Pour cela on ne peut pas le vérifier en égrénant une à une les valeurs de n, puisqu'il y en a une infinité ! Cette méthode prendrait donc un temps infini.

Par contre on peut utiliser un *raisonnement par récurrence*, qui consiste à montrer une *initialisation* (ou *amorce*) et une *hérédité* pour le prédicat $P(n)$.

Ce raisonnement se décline sous plusieurs formes.

Théorème 5 – Récurrence simple

Initialisation. $P(n_0)$ est vrai.
Hérédité. Pour n entier naturel fixé tel que $n \geq n_0$, on a : $\Big(P(n) \text{ vrai} \Longrightarrow P(n+1) \text{ vrai} \Big)$
Conclusion. Alors on sait que $P(n)$ est vrai pour tout entier naturel n tel que $n \geq n_0$.

C'est un peu comme une chaîne infinie de dominos : l'initialisation consiste à faire tomber le premier domino, et l'hérédité consiste à s'assurer que chaque domino va entraîner le domino suivant dans sa chute. La conclusion est que tous les dominos vont tomber.

✎ ***Exemple.*** Pour n entier naturel non nul, montrer par récurrence simple que $1+2+3+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

⚠ Ne pas oublier l'initialisation ! Le prédicat $P(n)$ = « 3 divise 2^n » est héréditaire mais n'est jamais initialisé.

Théorème 6 – Récurrence à deux pas

Initialisation à deux pas. $P(n_0)$ et $P(n_0+1)$ sont vrais.
Hérédité à deux pas.
Pour n entier naturel fixé tel que $n \geq n_0$, on a : $\Big(P(n)$ et $P(n+1)$ vrais $\Longrightarrow P(n+2)$ vrai$\Big)$
Conclusion. Alors on sait que $P(n)$ est vrai pour tout entier naturel n tel que $n \geq n_0$.

On peut reprendre l'analogie des dominos mais cette fois ils sont plus difficiles à faire tomber : il faut le poids de deux dominos successifs pour faire tomber le suivant (c'est l'hérédité à deux pas), et pour amorcer le processus il faut pousser assez fort pour faire tomber les deux premiers dominos (si on ne pousse que le premier, son poids ne suffit pas à faire tomber le second).

✎ ***Exemple.*** On pose $F_0 = F_1 = 1$ et pour n entier naturel, $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$ (suite de Fibonacci). Montrer par récurrence à deux pas que pour n entier naturel, $F_n \geq 0$.

Ce principe se généralise : on peut démontrer un propriété par récurrence à trois pas, à quatre pas. . .et même à p pas pour p un entier naturel fixé.

Théorème 7 – Récurrence forte

Initialisation. $P(n_0)$ est vrai.
Hérédité forte.
Pour n entier naturel fixé tel que $n \geq n_0$, on a :

$$\Big(P(n_0), P(n_0+1), \dots, P(n) \text{ vrais} \Longrightarrow P(n+1) \text{ vrai}\Big)$$

Conclusion. Alors on sait que $P(n)$ est vrai pour tout entier naturel n tel que $n \geq n_0$.

Cette fois les dominos sont de plus en plus difficiles à faire tomber : pour faire tomber un domino, il faut le poids de tous les dominos précédents. Pour amorcer il suffit de pousser le premier.

✎ ***Exemple.*** On pose $u_1 = 3$ et pour $n \geq 1$, $u_{n+1} = \dfrac{2}{n}(u_1 + u_2 + \cdots + u_n)$.
Montrer par récurrence forte que pour $n \geq 1$, $u_n = 3n$.

3 Ensembles

3.1 Définitions

Définition 8 – Ensembles

Un *ensemble* E est une collection d'objets appelés *éléments*.

On note $x \in E$ lorsque x est élément de E, et on dit que x *appartient à* E. On note $x \notin E$ dans le cas contraire, et on dit que x *n'appartient pas à* E.

✎ ***Exemple.*** Un ensemble peut être défini *par extension* ie en énumérant la liste de ses éléments entre accolades :

$\{a\}$ = ensemble formé d'un unique élément a, appelé « *singleton a* »
E = ensemble des couleurs d'un jeu de 32 cartes = {coeur, carreau, trèfle, pique}
$\mathbb{N}$ = ensemble des entiers naturels = $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ (infinité d'éléments)

Soit $P(x)$ un prédicat dépendant de x élément de E.

Définition 9 – Quantificateurs

1. Lorsque $P(x)$ est vrai **pour tous** les éléments x de E, on le note :
$$\forall x \in E, P(x)$$
Le symbole $\forall$ est appelé quantificateur « quel que soit ».
2. Lorsque $P(x)$ est vrai pour **au moins un** élément x de E, on le note :
$$\exists x \in E; P(x)$$
Le symbole $\exists$ est appelé quantificateur « il existe ».
3. Lorsque $P(x)$ est vrai pour **un unique** élément x de E, on le note :
$$\exists! x \in E; P(x)$$
Le symbole $\exists!$ est appelé quantificateur « il existe un unique ».

Rédaction.

1. *Pour montrer que « $\forall x \in E, P(x)$ », on procède de la manière suivante : on se donne $x \in E$ fixé quelconque et le but est alors de montrer que $P(x)$ est vrai pour cet x.*
2. *Pour montrer que « $\exists x \in E; P(x)$ », on procède de la manière suivante : on doit trouver $x \in E$ tel que $P(x)$ soit vrai, par exemple en résolvant une équation d'inconnue x et en prouvant que cette équation a au moins une solution.*
3. *Pour montrer que « $\exists! x \in E; P(x)$ », on procède de la manière suivante : on doit trouver un unique $x \in E$ tel que $P(x)$ soit vrai, par exemple en résolvant une équation d'inconnue x et en prouvant que cette équation a une unique solution.*

Remarque importante. Pour montrer qu'un prédicat $P(n)$ est vrai pour tout entier naturel n, on peut donc faire une preuve « directe » à la place d'une preuve par récurrence. On fixe n entier naturel quelconque, et on montre que $P(n)$ est vrai. On obtient alors qu'il est vrai pour tout entier naturel n.

⚠ Pour montrer que « $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ est vrai », il ne faudra donc pas mélanger preuve par récurrence et preuve directe.

✎ ***Exemple.*** Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 2^{n+1} \geq 2$.

Il faut connaître la négation de ces quantificateurs.

Proposition 10 – Négation des quantificateurs

1. Les prédicats $non\big(\forall x \in E,\, P(x)\big)$ et $\exists x \in E;\, non\big(P(x)\big)$ sont égaux.
2. Les prédicats $non\big(\exists x \in E;\, P(x)\big)$ et $\forall x \in E,\, non\big(P(x)\big)$ sont égaux.

En particulier dire que « il n'existe pas $x \in E$ pour lequel le prédicat $P(x)$ est vrai » revient à dire que « pour tout $x \in E$, le prédicat $P(x)$ est faux ».

Nous allons maintenant voir comment comparer deux ensembles.

Définition 11 – Inclusion

Soient E et F deux ensembles. On dit que F est *inclus* dans E et on le note $F \subset E$ ou $F \subseteq E$, lorsque tout élément de F est aussi élément de E, i.e. lorsque :

$$\forall x \in F,\, x \in E$$

ou encore :

$$x \in F \Longrightarrow x \in E$$

On dit aussi que F est un *sous-ensemble* de E, ou que F est une *partie* de E.

Dans le cas contraire, on le note $F \not\subset E$ et on le traduit par : $\exists x \in F;\, x \notin E$.

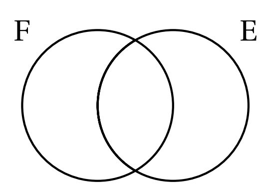
✎ ***Exemple.*** $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

✎ ***Exemple.*** L'ensemble des élèves de Sup1 est inclus dans l'ensemble des élèves du lycée.

⚠ ATTENTION : dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, on peut toujours comparer deux nombres x et y : on a $x \leq y$ et $x \geq y$. On dit que la relation d'ordre $\leq$ est **totale**. Mais ce n'est pas le cas pour la relation d'inclusion sur les ensembles : si F et E sont deux ensemble quelconques, on peut avoir $F \not\subset E$ et $E \not\subset F$.

✎ ***Exemple.*** Dans $\mathbb{R}$, si $F = \mathbb{Z}$ et $E = \mathbb{R}^+ = [0, +\infty[$, alors $F \not\subset E$ et $E \not\subset F$.

✎ ***Exemple.*** Sur l'exemple suivant, on a : $F \not\subset E$ et $E \not\subset F$.



Rédaction. *Pour montrer que $F \subseteq E$ on se donne $x \in F$ fixé quelconque, et on démontre que $x \in E$.*

✎ ***Exemple.*** Montrer que $\mathbb{N} \subseteq]-1, +\infty[$.

Proposition 12 – Propriétés élémentaires de la relation d'inclusion

Si E, F, G sont trois ensembles :

1. on a $E \subseteq E$;
2. si $G \subseteq F$ et $F \subseteq E$ alors $G \subseteq E$.

⚠ Ne pas confondre les symboles $\in$ et $\subseteq$. Ils sont liés par la propriété :

$$x \in E \iff \{x\} \subseteq E$$

Définition 13 – Egalité de deux ensembles

Soient E et F deux ensembles.
On dit que $E = F$ lorsque $E \subseteq F$ et $F \subseteq E$, i.e. lorsque : $x \in E \iff x \in F$.

Dans le cas contraire on le note $E \neq F$.

✎ ***Exemple.*** Ecrire le prédicat $E \neq F$ avec des quantificateurs.

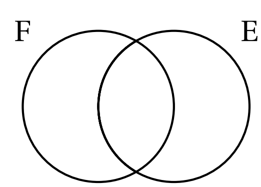
Si $F \subseteq E$ mais $E \not\subseteq F$ alors on dit que F est *strictement inclus* dans E, et on le note $F \subsetneq E$.

✎ ***Exemple.*** $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z}$.

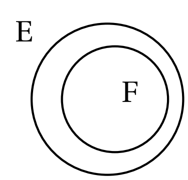
✎ ***Exemple.*** L'ensemble des élèves de Sup1 est strictement inclus dans l'ensemble des élèves du lycée.

⚠ Ne pas confondre les symboles :

- non inclus $F \not\subseteq E$



- strictement inclus $F \subsetneq E$



Dans les deux cas $F \neq E$.

Rédaction. *Pour montrer que $E = F$ on procède donc par double-inclusion.*

$\boxed{\subseteq}$ *On se donne $x \in E$ fixé quelconque ; on doit alors montrer que $x \in F$. On en déduit que $E \subseteq F$.*

$\boxed{\supseteq}$ *On se donne $x \in F$ fixé quelconque ; on doit alors montrer que $x \in E$. On en déduit que $F \subseteq E$.*

On peut alors conclure que $E = F$.

✎ ***Exemple.*** On peut dire que l'ensemble E des élèves de Sup1 est égal à l'ensemble F des élèves du lycée qui ont des cheveux bruns, si tous les élèves de Sup1 ont les cheveux bruns ($E \subseteq F$) et si tous les élèves du lycée qui ont des cheveux bruns sont en Sup1 ($F \subseteq E$).

On définit un ensemble particulier qui ne possède pas d'élément.

Définition 14 – Ensemble vide

On appelle *ensemble vide*, noté $\emptyset$, l'ensemble qui ne posséde aucun élément.
Il est inclus dans tout autre ensemble.
Il ne possède qu'un sous-ensemble : lui-même.

Très souvent on définit un sous-ensemble *par compréhension* ie en imposant que ses éléments vérifient une certaine propriété.

Définition 15 – Sous-ensemble défini par compréhension

Soient E un ensemble et $P(x)$ une propriété dépendant de x élément de E. L'ensemble F des éléments de E vérifiant la propriété $P(x)$ est noté : $F = \{x \in E ;\ P(x)\}$.
C'est un sous-ensemble de E.

Avec cette notation il n'est plus nécessaire d'énumérer les éléments (comme dans la définition *par extension*), ce qui est très pratique pour les ensembles infinis. Pour montrer que $x \in F$ il est donc équivalent de montrer que $P(x)$ est vrai.

✎ ***Exemple.*** $A = \{x \in \mathbb{R} ;\ x^2 - 3x + 2 \geq 1\}$ est une partie de $\mathbb{R}$.

✎ ***Exemple.*** Montrer que $\left\{x \in \mathbb{R} ;\ x^2 - 2x + 1 = 0\right\} = \{1\}$.

Définition 16 – Ensemble des parties

Si E est un ensemble, on note $\mathscr{P}(E)$ *l'ensemble des parties* de E.
On a donc pour F un ensemble quelconque :

$$F \subseteq E \iff F \in \mathscr{P}(E)$$

Un ensemble E a toujours comme parties $\emptyset$ et E, donc on a toujours $\emptyset \in \mathscr{P}(E)$ et $E \in \mathscr{P}(E)$.

✎ ***Exemple.*** Si E est vide : $\mathscr{P}(\emptyset) = \{\emptyset\} \neq \emptyset$ (ensemble à un élément : l'ensemble vide).
Si E est un singleton : $\mathscr{P}\big(\{a\}\big) = \big\{\emptyset, \{a\}\big\}$.
Si E a deux éléments : $\mathscr{P}\big(\{a, b\}\big) = \big\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\big\}$.

✎ ***Exemple.*** On a donc : $x \in E \Longleftrightarrow \{x\} \subseteq E \Longleftrightarrow \{x\} \in \mathscr{P}(E) \Longleftrightarrow \big\{\{x\}\big\} \subseteq \mathscr{P}(E)$.

Terminons ce paragraphe par un paradoxe célèbre et d'énoncé simple, appelé paradoxe de Russel : il n'existe pas d'ensemble de tous les ensembles. Ce paradoxe est plus facile à comprendre sous la forme du paradoxe du barbier : il n'existe pas de barbier qui raserait tous les hommes qui ne se rasent pas eux-mêmes (et seulement ceux-là). En effet, qui raserait ce barbier ?

3.2 Opérations sur les ensembles

Définition 17 – Intersection et union de deux parties d'un ensemble

Soient A et B deux parties d'un ensemble E.

1. On définit *l'intersection* de A et B, notée $A \cap B$, comme étant l'ensemble des éléments de E qui appartiennent à A et à B, ie :

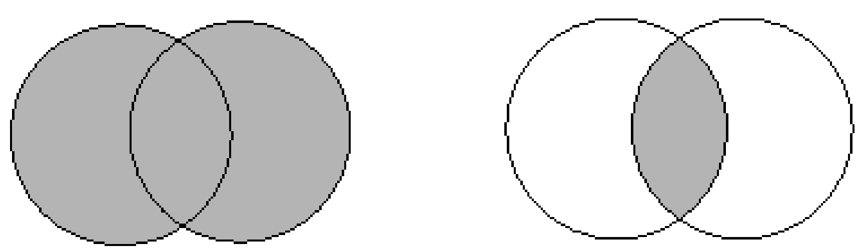
$$\forall x \in E, \quad \big(x \in A \cap B \Longleftrightarrow x \in A \text{ et } x \in B\big)$$

2. On définit *l'union* de A et B, notée $A \cup B$, comme étant l'ensemble des éléments de E qui appartiennent à A ou à B, ie :

$$\forall x \in E, \quad \big(x \in A \cup B \Longleftrightarrow x \in A \text{ ou } x \in B\big)$$

$A \cap B$ et $A \cup B$ sont donc deux parties de E.

Les figures suivantes représentent l'union et l'intersection de deux ensembles A et B.



Proposition 18 – Règles de calcul

Si A, B et C sont trois parties d'un ensemble E :

1. $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$
2. **Associativité :** $\big(A \cap B\big) \cap C = A \cap \big(B \cap C\big)$ et $\big(A \cup B\big) \cup C = A \cup \big(B \cup C\big)$
3. $A \cap A = A \cup A = A \qquad A \cap \varnothing = \varnothing \qquad A \cup \varnothing = A$
4. **Commutativité :** $A \cap B = B \cap A$ et $A \cup B = B \cup A$
5. **Distributivité de $\cap$ par rapport à $\cup$:** $A \cap \big(B \cup C\big) = \big(A \cap B\big) \cup \big(A \cap C\big)$

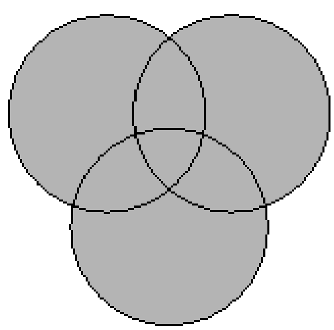
Distributivité de ∪ par rapport à ∩ : $A\cup\left(B\cap C\right)=\left(A\cup B\right)\cap\left(A\cup C\right)$

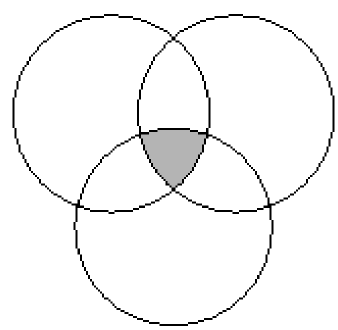
La propriété d'associativité de l'union permet de se dispenser des parenthèses et d'utiliser la notation $A\cup B\cup C$ pour l'union de trois ensembles : en effet, cette notation désigne indifféremment $(A\cup B)\cup C$ ou $A\cup(B\cup C)$, et ces deux quantités sont égales donc cela ne pose pas de problème de confusion.

La même remarque est valable pour l'intersection : on peut utiliser la notation $A\cap B\cap C$.

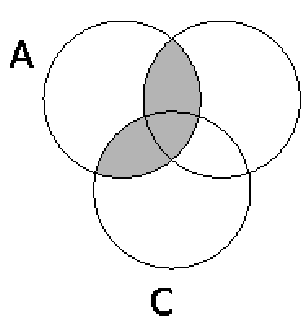
⚠ Par contre, dans une expression mélangeant union et intersection, on ne peut pas se dispenser des parenthèses.
Par exemple la notation $A\cup B\cap C$ n'a aucun sens! En effet, elle peut désigner $(A\cup B)\cap C$ ou $A\cup(B\cap C)$, et comme ces deux quantités sont différentes, on ne sait plus de quoi on parle!

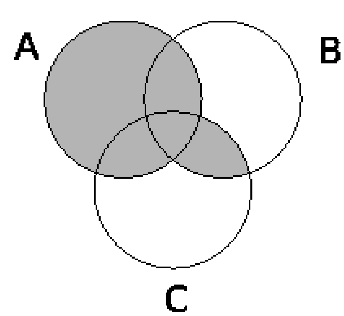
Les figures suivantes représentent l'union et l'intersection de trois ensembles A, B et C.





Les propriétés de distributivité sont aussi très importantes : elle sont à rapprocher de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition des nombres. Les figures suivantes permettent de visualiser les formules $A\cap\left(B\cup C\right)=\left(A\cap B\right)\cup\left(A\cap C\right)$ et $A\cup\left(B\cap C\right)=\left(A\cup B\right)\cap\left(A\cup C\right)$.



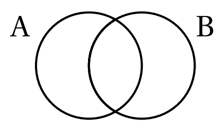


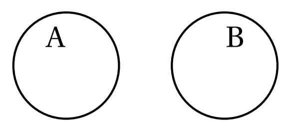
Définition 19 – Parties disjointes/incompatibles

On dit que deux parties A et B d'un ensemble E sont *disjointes* ou *incompatibles* lorsque $A \cap B = \emptyset$.

⚠ ATTENTION ! Ne pas confondre A et B **disjoints** : $A \cap B = \emptyset$, et A et B **distincts** : $A \neq B$. Deux ensembles disjoints sont distincts (ou vides), mais deux ensembles distincts ne sont en général pas disjoints.

Les figures suivantes représentent deux ensembles distincts mais non disjoints, et deux ensembles disjoints (donc distincts).





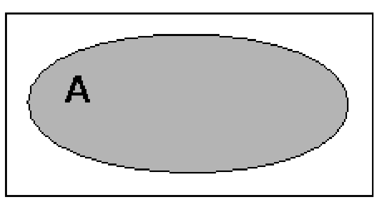
Définition 20 – Complémentaire

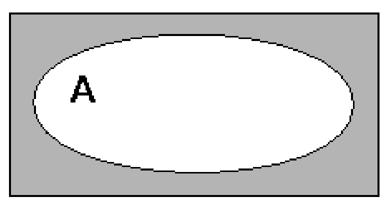
Soit A une partie d'un ensemble E. Le *complémentaire* de A dans E, noté $\complement_E A$, est défini par :

$$\complement_E A = \{x \in E ;\ x \notin A\}$$

Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur E, $\complement_E A$ est noté plus simplement $\overline{A}$.

Les figures suivantes représentent une partie A et son complémentaire (E est représenté par un rectangle).





Proposition 21 – Règles de calcul

Si A est une partie de E :

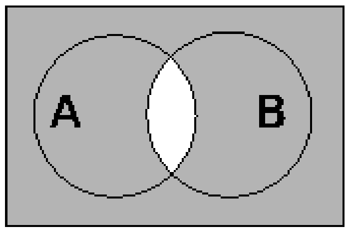
1. $\overline{\overline{A}} = A$;
2. $\overline{\emptyset} = E$ et $\overline{E} = \emptyset$;
3. $A \cup \overline{A} = E$ et $A \cap \overline{A} = \emptyset$.

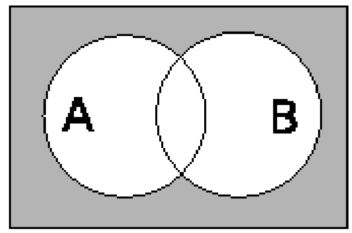
✎ ***Exemple.*** Soient A et B parties de E. Montrer que $A \cap B = \emptyset \iff A \subseteq \overline{B}$.

Théorème 22 – Lois de Morgan

Si A et B sont deux parties de E : $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$ et $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$.

Les deux figures suivantes permettent de visualiser les lois de Morgan.

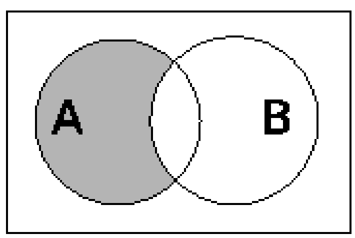




Définition 23 – Différence

Si A et B sont deux parties de E, on appelle *différence* de A et B, notée $A-B$ ou $A\backslash B$, la partie de E définie par :

$$A\backslash B = A\cap\overline{B}=\left\{x\in A;\ x\notin B\right\}$$



3.3 Produits cartésiens et familles d'éléments

Définition 24 – Produit cartésien

1. Soient E et F deux ensembles.
   On note $E\times F$ l'ensemble des couples (x,y) tels que $x\in E$ et $y\in F$:
   $$E\times F=\left\{(x,y);\ x\in E \text{ et } y\in F\right\}$$
   $E\times F$ est appelé *produit cartésien* de E et de F.
2. Plus généralement, si E_1, E_2, …, E_n sont n ensembles, on note $E_1\times E_2\times\cdots\times E_n$ l'ensemble des *n-uplets* $(x_1,\dots,x_n)$ tels que $x_1\in E_1$, $x_2\in E_2$, …, $x_n\in E_n$.
3. Si $E_1=E_2=\cdots=E_n=E$, alors $E_1\times E_2\times\cdots\times E_n$ est noté E^n, et ses éléments sont appelés *n-listes* d'éléments de E.

✎ ***Exemple.*** $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R} = \{(x,y,z);\ x\in\mathbb{R},\ y\in\mathbb{R} \text{ et } z\in\mathbb{R}\}$.

Définition 25 – Famille finie d'éléments de E

Soient $I = \{i_1, i_2, \dots, i_n\}$ un ensemble fini (appelé ensemble d'indices), et E un ensemble. On dit que $(x_i)_{i\in I}$ est une *famille d'éléments de* E indexée par I lorsque, pour chaque $i \in I$, x_i est un élément de E.

✎ ***Exemple.*** Pour $I = \{1, 2, \dots, n\}$, $(x_i)_{i\in I} = (x_1, \dots, x_n)$ est un n-uplet d'éléments de E.

Une famille généralise donc les n-uplets à des éléments qu'on veut indicer de manière générale, alors que pour les n-uplets on les numérote toujours de 1 à n. Les n-uplets sont donc des cas particuliers de famille.

✎ ***Exemple.*** $(x_{\text{Pierre}}, x_{\text{Paul}}, x_{\text{Jacques}})$ est une famille de 3 éléments mais n'est pas un 3-uplet.
Dans la suite, $I = \{i_1, i_2, \dots, i_n\}$ est un ensemble fini.

Définition 26 – Famille finie de parties de E

On dit que $(A_i)_{i\in I}$ est une famille de parties de E, lorsque pour $i \in I$, A_i est une partie de E.

Dans ce cas $(A_i)_{i\in I}$ est une famille d'éléments de $\mathscr{P}(E)$, au sens de la définition donnée précédemment.

✎ ***Exemple.*** $\left(\left[1, 1+\dfrac{1}{k}\right[\right)_{1\le k\le n}$ est une famille de parties de $\mathbb{R}$.

Définition 27 – Union/Intersection d'une famille finie de parties

Si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille finie de parties de E, on définit *l'union* des A_i pour $i \in I$, notée $\bigcup_{i\in I} A_i$, par :

$$\forall x\in E,\quad \left(x \in \bigcup_{i\in I} A_i \iff \exists i \in I;\ x \in A_i\right)$$

De même on définit aussi leur *intersection* $\bigcap_{i\in I} A_i$, par :

$$\forall x\in E,\quad \left(x \in \bigcap_{i\in I} A_i \iff \forall i \in I;\ x \in A_i\right)$$

Lorsque $I = \{1, 2, \dots, n\}$ ces deux parties sont notées $\bigcup_{k=1}^{n} A_k$ et $\bigcap_{k=1}^{n} A_k$ et vérifient :

$$\forall x\in E,\qquad \left(x \in \bigcup_{k=1}^{n} A_k \iff \exists k \in \{1,2,\dots,n\};\ x \in A_k\right)$$

$$\forall x\in E,\qquad \left(x \in \bigcap_{k=1}^{n} A_k \iff \forall k \in \{1,2,\dots,n\};\ x \in A_k\right)$$

✎ ***Exemple.*** Montrer que $\displaystyle\bigcup_{k=1}^{n}\left[1,1+\frac{1}{k}\right[=[1,2[$ et $\displaystyle\bigcap_{k=1}^{n}\left[1,1+\frac{1}{k}\right[=\left[1,1+\frac{1}{n}\right[$.

Proposition 28 – Règles de calcul

Si B est une partie de E et $(A_i)_{i\in I}$ est une famille de parties de E, alors :

1. **Distributivité de $\cap$ par rapport à $\cup$:** $\displaystyle\left(\bigcup_{i\in I}A_i\right)\cap B=\bigcup_{i\in I}(A_i\cap B)$,

   et de $\cup$ par rapport à $\cap$: $\displaystyle\left(\bigcap_{i\in I}A_i\right)\cup B=\bigcap_{i\in I}(A_i\cup B)$.

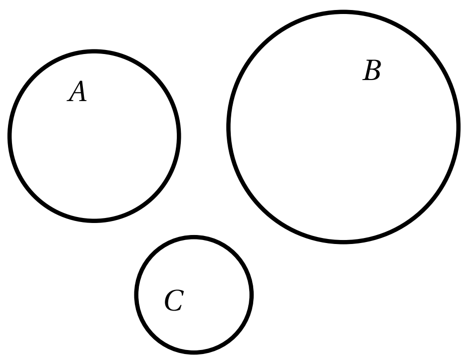
2. **Lois de Morgan :** $\displaystyle\overline{\bigcup_{i\in I}A_i}=\bigcap_{i\in I}\overline{A_i}$ et $\displaystyle\overline{\bigcap_{i\in I}A_i}=\bigcup_{i\in I}\overline{A_i}$.

Définition 29 – Famille de parties deux à deux disjointes

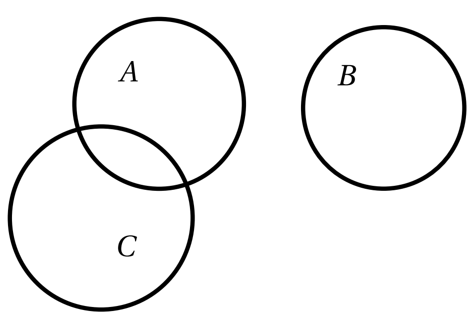
Si $(A_i)_{i\in I}$ famille de parties de E, on dit que les A_i sont deux à deux disjointes lorsque :

$$\forall (i,j)\in I^2,\quad i\neq j \Longrightarrow A_i\cap A_j=\emptyset$$

⚠ Si A, B et C sont des parties de E deux à deux disjointes alors $A\cap B\cap C=\emptyset$:



Par contre il est possible que $A\cap B\cap C=\emptyset$ mais que A, B et C ne soient pas deux à deux disjointes :



⚠ **Prendre garde aux notations.**
Les *accolades* définissent des *ensembles* et les *parenthèses* définissent des *familles*.
Pour les ensembles, les *répétitions* ne sont pas prises en compte, contrairement aux familles :

$$\{a,a,b\}=\{a,b\} \quad \text{mai} \quad (a,a,b)\neq(a,b)$$

Pour les ensembles *l'ordre* n'est pas pris en compte, contrairement aux familles :

$$\{a,b\}=\{b,a\} \quad \text{mais} \quad (a,b)\neq(b,a)$$

4 Applications

4.1 Définitions

Définition 30 – Application

Soient E et F deux ensembles. Une *application* définie sur E à valeurs dans F se note :

$$f: \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

est une "relation" qui à chaque $x\in E$ associe un unique élément $y\in F$, noté $f(x)$.
On la note plus simplement $f:E\longrightarrow F$ ou $x\in E \overset{f}{\longmapsto} f(x)\in F$.
$f(x)$ est appelé *image* de x, et si $y=f(x)$ alors x est appelé *antécédent* de y.

Vocabulaire :
• $f:E\longrightarrow F$ se lit « f est une application de E vers F » ou encore « f est une application définie sur E à valeurs dans F ».
• $x\longmapsto f(x)$ se lit « à x on associe $f(x)$ ».
• $f(x)$ se lit aussi f *évaluée* en x.

Lorsque f n'est pas définie sur E tout entier, on dit que f est une *fonction*, mais les confusions de vocabulaire entre applications et fonctions sont fréquentes.

⚠ On suppose donc dans tout ce chapitre que les applications sont définies sur E tout entier. On ne donnera donc pas l'ensemble de définition de f, puisque ce sera à chaque fois E tout entier.

Si à chaque $x\in E$ la « relation » associe plusieurs éléments de F, on ne parle pas d'*application* mais de *correspondance* de E vers F (mais ce n'est pas du tout au programme).

✎ ***Exemple.*** On associe à $x\in\mathbb{R}$ sa valeur absolue : c'est une application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

✎ ***Exemple.*** On associe à $n\in\mathbb{N}$ ses diviseurs positifs : c'est une correspondance de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{N}$.

✎ ***Exemple.*** $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ définie par $f(x,y)=x^2+xy$ est une application.

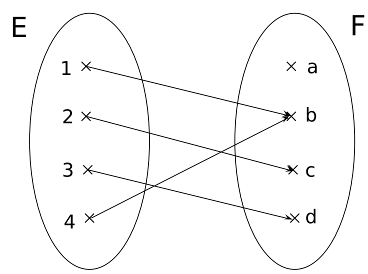
Définition 31 – Graphe d'une application

Le *graphe* de f est le sous-ensemble de $E \times F$ donné par :

$$G = \left\{(x, f(x)) \in E \times F ;\ x \in E\right\}$$

Notation. On note $\mathscr{F}(E, F)$ ou F^E l'ensemble de toutes les applications définies sur E à valeurs dans F.

Une application peut être représentée par un diagramme :



Sur le diagramme précédent on voit qu'un élément de l'ensemble d'arrivée peut n'avoir *aucun antécédent*, ou en avoir *plusieurs*.

Important. Lorsque $f : E \longrightarrow F$, ie f va de E vers F, on suppose en particulier que :

$$\forall x \in E, \quad f(x) \in F$$

Définition 32 – Égalité de deux applications

Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : E' \longrightarrow F'$ deux applications. On dit que f et g sont *égales*, et on le note $f = g$, lorsque $E = E'$, $F = F'$ et :

$$\forall x \in E, \quad f(x) = g(x)$$

En particulier, si $E = E'$ et $F = F'$ alors $f \neq g$ si et seulement si : $\exists x \in E ;\ f(x) \neq g(x)$.

⚠ On considère que les applications $\sin : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\sin : \mathbb{R} \longrightarrow [-1, 1]$ sont différentes.

⚠ L'égalité $f = g$ a lieu dans F^E alors que l'égalité $f(x) = g(x)$ a lieu dans F. Ne pas confondre les deux ! $f = g$ entraîne toujours que $f(x) = g(x)$, par contre $f(x) = g(x)$ doit être vraie pour tout $x \in E$ pourqu'on puisse en déduire $f = g$.

Définition 33 – Applications constantes

Soient E et F deux ensembles. Une application $f : E \longrightarrow F$ est dite *constante* lorsqu'il existe $a \in F$ tel que :

$$\forall x \in E, \quad f(x) = a$$

On dit alors que f est constante égale à a.

Si $F = \mathbb{R}$ on dit que f est constante nulle lorsque $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 0$.

⚠ Ne pas confondre f constante nulle avec f s'annule : $\exists x_0 \in E$; $f(x) = 0$.

Définition 34 – Application identité

Si E est un ensemble on définit l'application :

$$\begin{array}{rrcl} \mathrm{id}_E : & E & \longrightarrow & E \\ & x & \longmapsto & \mathrm{id}_E(x) = x \end{array}$$

✎ ***Exemple.*** Le graphe de la fonction numérique $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ est la droite d'équation $y = x$ appelée *première bissectrice*.

Nous verrons plus loin qu'elle joue le rôle d'élément neutre pour la loi de composition.

Définition 35 – Restriction

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application.

1. Si $E_1 \subseteq E$ alors on appelle restriction de f à E_1, notée $f_{|E_1}$, l'application :

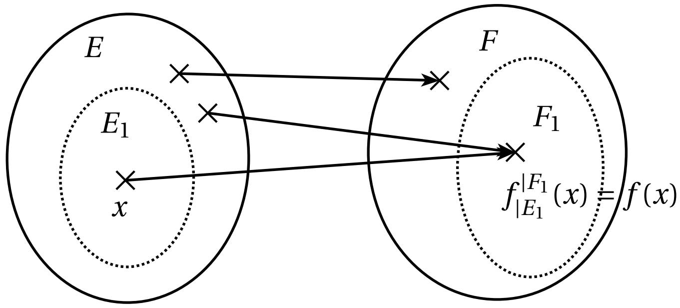
$$\begin{array}{rrcl} f_{|E_1} : & E_1 & \longrightarrow & F \\ & x & \longmapsto & f_{|E_1}(x) = f(x) \end{array}$$

   On a donc : $\forall x \in E_1$, $f_{|E_1}(x) = f(x)$.
2. Soient $E_1 \subseteq E$ et $F_1 \subseteq F$ tel que : $\forall x \in E_1$, $f(x) \in F_1$.
   On appelle restriction de f à E_1 au départ et à F_1 à l'arrivée, notée $f_{|E_1}^{|F_1}$, l'application :

$$\begin{array}{rrcl} f_{|E_1}^{|F_1} : & E_1 & \longrightarrow & F_1 \\ & x & \longmapsto & f_{|E_1}^{|F_1}(x) = f(x) \end{array}$$

   On a : $\forall x \in E_1$, $f_{|E_1}^{|F_1}(x) = f(x)$.

✎ ***Exemple.*** La fonction $\sin : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ peut être restreinte à $[0, \pi]$ au départ et à $[0, 1]$ à l'arrivée. La restriction est alors notée $\sin_{|[0,\pi]}^{|[0,1]}$.



Définition 36 – Prolongement

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application.

1. Si $E \subseteq E_2$ alors on appelle prolongement de f à E_2 toute application $g : E_2 \longrightarrow F$ telle que $g_{|E} = f$ ie telle que : $\forall x \in E,\ g(x) = f(x)$.
2. Si $E \subseteq E_2$ et $F \subseteq F_2$, alors on appelle prolongement de f à E_2 au départ et F_2 à l'arrivée, toute application $g : E_2 \longrightarrow F_2$ telle que $g_{|E}^{|F} = f$ ie telle que :
$\forall x \in E,\ g(x) = f(x)$.

4.2 Loi de composition

Définition 37 – Composée d'applications

Soient deux applications $f : E \longrightarrow F$ et $g : F' \longrightarrow G$ telles que $F \subseteq F'$.
On définit l'application composée $g \circ f : E \longrightarrow G$ par :

$$\forall x \in E, \quad (g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$$

On a le diagramme de composition :

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "g"] & G \\ E \arrow[u, "f"] \arrow[ur, "g\circ f"'] & \end{tikzcd}$$

⚠ Ne pas écrire $g(x) \circ f(x)$ à la place de $g \circ f(x)$!
En effet la notation $g(x) \circ f(x)$ n'a pas de sens, et tout calcul qui l'emploie est donc irrémédiablement faux.

⚠ A la place de $(g \circ f)(x)$ on écrit souvent $g \circ f(x)$ mais ce n'est pas la fonction g composée avec l'élément $f(x)$ (ce qui n'a pas de sens), c'est l'application $g \circ f$ évaluée en x.

✎ ***Exemple.*** On considère les applications $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto x^2 \in \mathbb{R}^+$ et $g : x \in \mathbb{R}^+ \longmapsto \sqrt{x} \in \mathbb{R}^+$. Les applications $f \circ g$ et $g \circ f$ existent-elles ? Si oui, donner leur expression.

✎ ***Exemple.*** Même question avec $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto x^2 \in \mathbb{R}^+$ et $g : x \in \mathbb{R}^+ \longmapsto \sqrt{x} \in \mathbb{R}$.

✎ ***Exemple.*** On définit deux applications f et g de $[0,1]$ vers $[0,1]$ par $f(x) = \begin{cases} 1/2 - x & \text{si } 0 \leq x < 1/2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ et $g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x < 1/2 \\ x - 1/2 & \text{sinon} \end{cases}$
Montrer que les fonctions $f \circ g$ et $g \circ f$ sont définies et donner leur expression.

Proposition 38 – Propriété de l'application identité

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. On a $f \circ \mathrm{id}_E = f$ et $\mathrm{id}_F \circ f = f$.

C'est pour cette raison que l'identité à un rôle d'élément neutre (un peu comme 0 pour l'addition et 1 pour la multiplication des nombres).

Proposition 39 – Associativité de la loi de composition

On se donne trois applications $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G \xrightarrow{h} H$.
On a la propriété d'associativité : $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

On peut donc sans ambiguité utiliser la notation $h \circ g \circ f$ (les parenthèses sont omises).
On a alors pour $x \in E$: $h \circ g \circ f(x) = h\Big(g\big(f(x)\big)\Big)$.

✎ ***Exemple.*** Soient les applications $f : x \longmapsto 1 + x^2$, $g : x \longmapsto \sqrt{x}$ et $h : x \longmapsto \ln(1+x)$. Montrer que $h \circ g \circ f$ est définie et donner l'expression de $h \circ g \circ f(x)$.

4.3 Injection, surjection, bijection

Définition 40 – Application injective

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application.
On dit que f est *injective* sur E (ou que f est une *injection*) lorsque :

$$\forall (x_1, x_2) \in E^2, \quad f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$$

ou encore par contraposée :

$$\forall (x_1, x_2) \in E^2, \quad x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$$

Deux points distincts ont donc toujours des images distinctes.
De manière équivalente ont peut dire que les points de F ont au plus un antécédent par f.

Rédaction. *Pour montrer que f est injective sur E on fixe x_1 et x_2 éléments de E tels que $f(x_1) = f(x_2)$. On doit alors montrer que $x_1 = x_2$.*
Pour montrer que f n'est pas injective sur E on cherche deux éléments distincts x_1 et x_2 dans E tels que $f(x_1) = f(x_2)$.

✎ ***Exemple.*** Montrer que $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$ n'est pas injective sur $\mathbb{R}$, et $g : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = x^2$ est injective sur $\mathbb{R}^+$.

Définition 41 – Application surjective

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. On dit que f est *surjective* de E vers F (ou que f est une *surjection*) lorsque :

$$\forall y \in F, \exists x \in E;\ y = f(x)$$

De manière équivalente on peut dire que les points de F ont tous au moins un antécédent dans E.

Rédaction. *Pour montrer que f est surjective de E vers F on fixe y élément quelconque de F. On doit alors trouver au moins un x élément de E tel que $f(x) = y$.*
Pour montrer que f n'est pas surjective de E vers F on cherche y élément de F qui n'a pas d'antécédent par f dans E, ie tel que $f(x) \neq y$ pour tout $x \in E$.

✎ ***Exemple.*** Montrer que $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$ n'est pas surjective de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ définie par $g(x) = x^2$ est surjective de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}^+$.

⚠ Attention à la subtilité suivante : si $x \in E$ on peut toujours poser $y = f(x)$ et on définit $y \in F$. Par contre si $y \in F$, on ne peut pas en général définir $x \in E$ en posant $y = f(x)$. En effet ceci suppose que y a un antécédent par f. Si f est surjective, il est possible de définir x en posant $y = f(x)$, mais il est plus clair de dire « on note x un antécédent de y par l'application surjective f » ; en effet, x n'est en général pas unique.

Définition 42 – Application bijective

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. On dit que f est *bijective* de E vers F (ou que f est une *bijection*) lorsque f est à la fois injective et surjective :

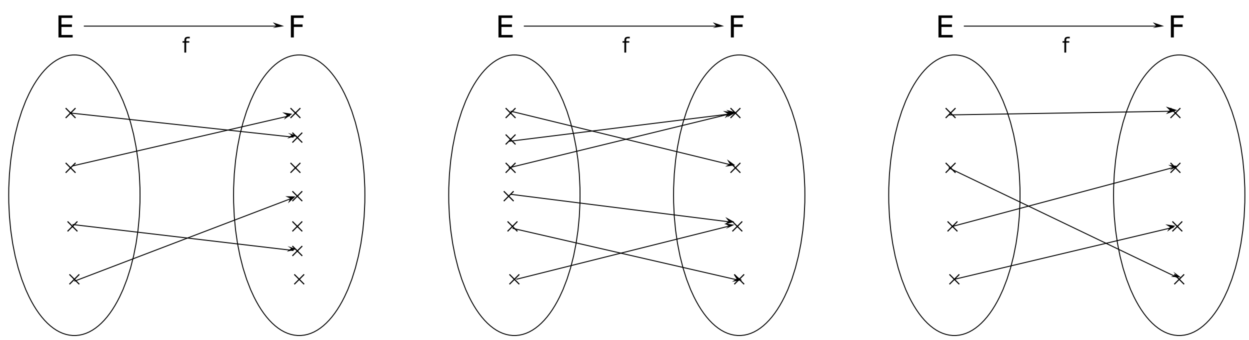
$$\forall y \in F, \exists! x \in E;\ y = f(x)$$

Un point de F a donc toujours un unique antécédent dans E.

Rédaction.

1. *Pour monter que f est bijective de E vers F on fixe y élément quelconque de F. On doit alors trouver un unique x élément de E tel que $f(x) = y$.*
2. *On peut aussi procéder en deux temps en montrant que f est injective, puis surjective.*

Le diagramme suivant illustre ces notions d'injection/surjection/bijection.



⚠ Attention, en général une application n'est ni injective, ni surjective.
Considérer par exemple $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ définie par $f(x)=x^2$.

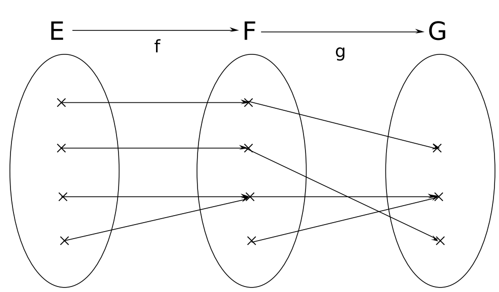
✎ ***Exemple.*** Montrons que $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^+$ définie par $f(x)=x^2$ n'est pas bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^+$, $g:\mathbb{R}^+\longrightarrow\mathbb{R}$ définie par $g(x)=x^2$ n'est pas non plus bijective de $\mathbb{R}^+$ sur $\mathbb{R}$, mais $h:\mathbb{R}^+\longrightarrow\mathbb{R}^+$ définie par $h(x)=x^2$ est bijective de $\mathbb{R}^+$ sur $\mathbb{R}^+$.

Proposition 43 – Composée d'injections/surjections/bijections

Soient deux applications $E\xrightarrow{f}F\xrightarrow{g}G$.

1. Si f est injective sur E et g injective sur F, alors $g\circ f$ est injective sur E.
2. Si f est surjective de E vers F et g surjective de F vers G, alors $g\circ f$ est surjective de E vers G.
3. Si f est bijective de E vers F et g bijective de F vers G, alors $g\circ f$ est bijective de E vers G.

Le diagramme suivant donne un exemple montrant qu'on peut avoir $g\circ f$ et g surjectives, mais f non surjective.



Définition 44 – Inversibilité pour la loi de composition

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application.
On dit qu'elle est *inversible pour la loi de composition* lorsqu'il existe une application $g : F \longrightarrow E$ telle que $g \circ f = \mathrm{id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{id}_F$.
Une telle fonction g est appelée application réciproque de f.

Proposition 45 – Unicité de l'inverse pour la loi de composition

Soit $f : E \longrightarrow F$ inversible pour la loi de composition.
Alors elle admet une unique application réciproque : on la note f^{-1}.

Si elle existe, l'application réciproque de $f : E \longrightarrow F$ a donc les propriétés suivantes :
- $f^{-1} : F \longrightarrow E$
- $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_E$ et $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_F$
- Pour $x \in E$ et $y \in F$: $f(x) = y \Longleftrightarrow x = f^{-1}(y)$

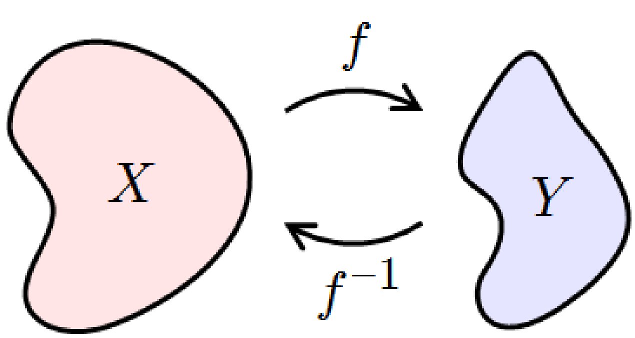
⚠ Lorsque f est à valeurs dans $\mathbb{R}^*$ (ou dans $\mathbb{C}^*$), ne pas confondre f^{-1} avec l'inverse de f pour la multiplication ! Pour cette raison, l'inverse de f pour la multiplication est souvent notée $\frac{1}{f}$.

Théorème 46 – Théorème de la bijection réciproque

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. On a équivalence de :
(i) f est bijective de E vers F ;
(ii) f est inversible pour la loi de composition.

L'application f^{-1} est donc bijective de F sur E, on l'appelle aussi *la bijection réciproque* de f. De plus, $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$.

Sur un diagramme, l'inverse f correspond à inverser le sens des flèches.



On dispose donc de trois méthodes pour montrer qu'une application f est bijective :

1. Montrer que f est injective et surjective.

2. Pour $y \in F$, résoudre l'équation $y = f(x)$ d'inconnue $x \in E$.
   Si on obtient une unique solution, on montre que f est bijective. De plus, l'expression obtenue donne la fonction f^{-1} : $x = f^{-1}(y)$.

3. On cherche une fonction $g : F \longrightarrow E$ telle que : $f \circ g = \mathrm{id}_F$ et $g \circ f = \mathrm{id}_E$.
   Si on trouve une telle fonction, on montre que f est bijective. De plus $f^{-1} = g$.

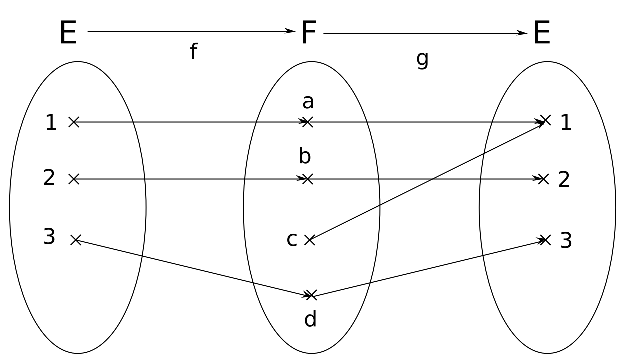
Remarquez que les deux dernières méthodes donnent aussi la fonction réciproque de f, en plus de la bijectivité.

✎ ***Exemple.*** Montrons que $f : x \in \mathbb{R}^+ \longmapsto \mathrm{e}^{x^2} \in [1, +\infty[$ est bijective de réciproque $f^{-1} : y \in [1, +\infty[\longmapsto \sqrt{\ln(y)} \in \mathbb{R}^+$.

✎ ***Exemple.*** Montrons que $\varphi : z \in \mathbb{C} \longrightarrow \overline{z} \in \mathbb{C}$ est bijective et $\varphi^{-1} = \varphi$ (on dit alors que φ est une *involution*).

✎ ***Exemple.*** Montrons que id_E est bijective et $\mathrm{id}_E^{-1} = \mathrm{id}_E$.

⚠ On peut avoir $g \circ f = \mathrm{id}_E$ et $f \circ g \neq \mathrm{id}_F$. Dans ce cas f n'est pas une bijection. Considérer $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ définies par $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = x^2$. On peut aussi visualiser cette propriété sur le diagramme suivant (où f est non surjective) :



Dans le cas d'une fonction définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, on a aussi une quatrième méthode pour démontrer la bijectivité qui repose sur le théorème suivant.

Théorème 47 – Théorème de la bijection monotone

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. On suppose que :
- (i) I est un intervalle de $\mathbb{R}$;
- (ii) f est continue sur I ;
- (iii) f est strictement monotone sur I.

Alors f induit une bijection de I vers un intervalle J, à déterminer avec le tableau de variations.

« f induit une bijection de I vers J » signifie que c'est la *restriction* $f_{|I}^{|J}$ est bijective. En général $f : \mathscr{D}_f \longrightarrow \mathbb{R}$ ne l'est pas, donc il faut toujours préciser les intervalles I et J.

✎ ***Exemple.*** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f : x \in \mathbb{R}^+ \longmapsto x^n \in \mathbb{R}$ induit une bijection de $\mathbb{R}^+$ vers $\mathbb{R}^+$.

Définition 48 – Fonction racine n-ième

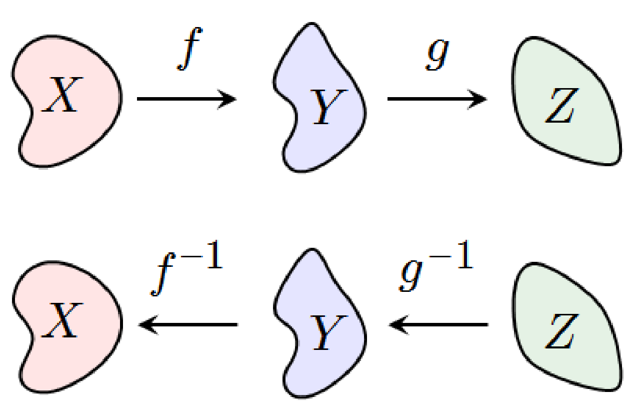
La bijection réciproque de la fonction $f : x \in \mathbb{R}^+ \longmapsto x^n \in \mathbb{R}^+$ est appelée fonction racine n-ième notée $\sqrt[n]{\cdot}$.
Pour x et y dans $\mathbb{R}^+$, on a : $x^n = y \iff x = \sqrt[n]{y}$.

⚠ $\sqrt[n]{\cdot}$ n'est définie que sur $\mathbb{R}^+$. Par exemple $\sqrt[3]{-1}$ n'est pas défini, bien que $(-1)^3 = -1$.

Proposition 49 – Bijection réciproque d'une composée

Soient $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$ bijectives. Alors $g \circ f$ est bijective et $\left(g \circ f\right)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

L'ordre a été inversé, mais cela paraît logique intuitivement : pour inverser f composée par g, il faut inverser g puis ensuite f.



4.4 Fonctions caractéristiques

Définition 50 – Fonction caractéristique d'une partie

Soit A une partie d'un ensemble E.
On appelle *fonction caractéristique* de A ou encore *fonction indicatrice* de A l'application :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{1}_A : \quad E & \longrightarrow & \{0,1\} \\ x & \longmapsto & \mathbb{1}_A(x) = \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ si } x \notin A \end{array} \right. \end{array}$$

✎ ***Exemple.*** La fonction $\mathbb{1}_\emptyset$ est constante égale à 0.
La fonction $\mathbb{1}_E$ est constante égale à 1.

Proposition 51 – Règles de calcul

Soient A, B parties de E.

1. On a : $A \subseteq B \iff \forall x \in E,\ \mathbb{1}_A(x) \leq \mathbb{1}_B(x)$,
   et : $A = B \iff \forall x \in E,\ \mathbb{1}_A(x) = \mathbb{1}_B(x)$;
2. $\forall x \in E,\ \mathbb{1}_{\overline{A}}(x) = 1 - \mathbb{1}_A(x)$;
3. $\forall x \in E,\ \mathbb{1}_{A\cap B}(x) = \mathbb{1}_A(x) \times \mathbb{1}_B(x)$;
4. $\forall x \in E,\ \mathbb{1}_{A\cup B}(x) = \mathbb{1}_A(x) + \mathbb{1}_B(x) - \mathbb{1}_A(x) \times \mathbb{1}_B(x)$.

✎ ***Exemple.*** Redémontrer les lois de Morgan à l'aide des fonctions caractéristiques.

4.5 Images directe et réciproque

Dans tout ce qui suit $f : E \longrightarrow F$ est une application.

Définition 52 – Image directe/réciproque

1. Si $A \subseteq E$, on appelle image directe de A par f l'ensemble :

$$\begin{array}{rcl} f(A) & = & \big\{f(x);\ x \in A\big\} \\ & = & \text{ensemble des } y \in F \text{ qui ont un antécédent dans } A \end{array}$$

   On a $f(A) \subseteq F$. De plus, si $y \in F$: $y \in f(A) \iff \exists x \in A;\ y = f(x)$

2. Si $B \subseteq F$, on appelle image réciproque de B par f l'ensemble :

$$\begin{array}{rcl} f^{-1}(B) & = & \big\{x \in E;\ f(x) \in B\big\} \\ & = & \text{ensemble des } x \in E \text{ qui ont leur image dans } B \end{array}$$

   On a $f^{-1}(B) \subseteq E$. De plus, si $x \in E$: $x \in f^{-1}(B) \iff f(x) \in B$.

⚠ La notation $f^{-1}(B)$ ne suppose pas que f est bijective, et donc f^{-1} n'est pas la bijection réciproque de f (puisqu'il n'en existe pas!).
Si f est bijective (et donc f^{-1} existe), $f^{-1}(B)$ peut désigner deux choses : l'image réciproque de B par f ou l'image directe de A par f. Heureusement, on peut montrer que ces deux quantités sont égales! Il n'y a donc pas d'incertitude dans la notation employée.

On a $f(\emptyset) = \emptyset$ et $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$.

✎ ***Exemple.*** Montrer que $A \subseteq f^{-1}\big(f(A)\big)$ et que $f\big(f^{-1}(B)\big) \subseteq B$.

Proposition 53 – Règles de calculs

On considère A_1 et A_2 deux parties de E et B_1 et B_2 deux parties de F.

1. On a : $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$ et $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$
2. On a : $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$ et $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$

Proposition 54 – Restriction surjective

Si $f : E \longrightarrow F$ est une application, alors f induit une surjection de E sur $f(E)$.
De plus, f est surjective de E vers F si et seulement si $f(E) = F$.

f induit une surjection signifie que c'est une restriction de f qui est surjective : ici $f_{|E}^{|f(E)}$.

Définition 55 – Partie stable

Soient $f : E \longrightarrow E$ une application et $A \subseteq E$. On dit que A est *stable par* f ou que A est f*-stable* lorsque $f(A) \subseteq A$, ie $\forall x \in A,\ f(x) \in A$.

✎ ***Exemple.*** Pour l'application $f : x \longmapsto x^2$, étudier si les parties suivantes sont stables : $A = \mathbb{R}^+$, $B = [0,2]$, $C = [2,+\infty[$?

4.6 Relations d'équivalence

On commence par la notion de relation binaire.

Définition 56 – Relation binaire

On appelle *relation binaire* $\mathscr{R}$ sur un ensemble E toute propriété vraie pour certains couples (x, y) d'éléments de E, et fausse pour les autres. Lorsqu'un couple (x, y) vérifie la relation R, on écrit $x\mathscr{R}y$; sinon, on écrit $x\not\mathscr{R}y$.

✎ ***Exemple.*** Egalité, inférieur ou égal et inclusion sont des relations binaires classiques.

✎ ***Exemple.*** Sur $E = \mathbb{R}$, on définit une relation binaire $\mathscr{R}$ par $x\mathscr{R}y \iff \sin(x) = \sin(y)$.
Alors $0\mathscr{R}\pi$ et $0\not\mathscr{R}\dfrac{\pi}{2}$.

Définition 57 – Propriétés des relations binaires

Si $\mathscr{R}$ est une relation binaire sur E, on dit que :

- $\mathscr{R}$ est *réflexive* si $\forall x \in E,\ x\mathscr{R}x$;
- $\mathscr{R}$ est *symétrique* si $\forall (x, y) \in E^2,\ x\mathscr{R}y \Longrightarrow y\mathscr{R}x$;
- $\mathscr{R}$ est *transitive* si $\forall (x, y, z) \in E^3,\ x\mathscr{R}y$ et $y\mathscr{R}z \Longrightarrow x\mathscr{R}z$;
- $\mathscr{R}$ est *antisymétrique* si $\forall (x, y) \in E^2,\ x\mathscr{R}y$ et $y\mathscr{R}x \Longrightarrow x = y$.

✎ ***Exemple.*** Les relations d'ordre sont, par définition, les relations réflexives, antisymétriques et transitives.

On définit ensuite la notion de relation d'équivalence.

Définition 58 – Relation d'équivalence

On appelle *relation d'équivalence* toute relation binaire à la fois réflexive, symétrique et transitive.

✎ ***Exemple.*** L'égalité est une relation d'équivalence sur n'importe quel ensemble E.

✎ ***Exemple.*** Sur $E = \mathbb{R}$, considérons la relation $\mathscr{R}$ définie par $x\mathscr{R}y \iff \sin(x) = \sin(y)$.
On vérifie aisément que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence.

✎ ***Exemple.*** Plus généralement, pour $f : E \longrightarrow F$, la relation $\mathscr{R}$ donnée par $x\mathscr{R}y \iff f(x) = f(y)$ est une relation d'équivalence sur E.

En fait une relation d'équivalence peut se comprendre comme « une égalité modulo certains critères ».

✎ ***Exemple.*** On fixe $a \in \mathbb{R}$. Sur $E = \mathbb{R}$, considérons la relation $\mathscr{R}$ définie par $x\mathscr{R}y \iff \exists k \in \mathbb{Z}; x = y + ka$.
On vérifie aisément que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence.
On l'appelle *congruence modulo a* et on le note : $x = y\ [a]$ ou $x \equiv y\ [a]$ ou $x \equiv y \pmod a$

5 Compétences à acquérir sur ce chapitre

➥ S'exprimer de manière rigoureuse en français ou à l'aide de quantificateurs.

- ✪ Lorsqu'on utilise un élément x, préciser avant dans quel ensemble il est, et s'il est quelconque ou non.

➥ Montrer une implication $A \Longrightarrow B$.

- ✪ Supposer que A est vrai et montrer que B est vrai.
- ✪ Raisonner par contraposée : montrer que $non(B) \Longrightarrow non(A)$.

➥ Montrer une équivalence $A \Longleftrightarrow B$.

- ✪ Par double-implication : montrer que $A \Longrightarrow B$ et que $B \Longrightarrow A$.

➥ Raisonner par l'absurde.

- ✪ Pour montrer A, on supposer que $\overline{A}$ est vrai et on cherche une contradiction évidente.

➥ Raisonner par disjonction de cas.

- ✪ Montrer A dans différents cas particuliers dont le regroupement redonne le cas général.

➥ Résoudre un problème par analyse-synthèse.

- ✪ Pour l'analyse se donner une solution du problème et essayer de la calculer.
- ✪ Pour la synthèse prendre la solution du calcul précédent et vérifier qu'elle est une vraie solution du problème.

➥ Raisonner par récurrence et être capable de choisir entre récurrence simple, à deux pas ou forte.

➥ Montrer une inclusion entre deux ensembles $F \subseteq E$.

- ✪ Fixer $x \in F$ quelconque, et montrer que $x \in E$.

➥ Montrer l'égalité de deux ensembles $E = F$.

- ✪ Raisonner par double-inclusion : montrer que $E \subseteq F$ et que $F \subseteq E$.
- ✪ Montrer l'égalité de leurs fonctions indicatrices.

➥ Connaître les règles de calcul sur les parties d'un ensemble E avec les opérations : union, intersection, complémentaire.

➥ Connaître les règles de calcul sur les fonctions indicatrices des parties d'un ensemble E.

➥ Connaître et différencier les notions de produits cartésiens et de familles.

➥ Utiliser un diagramme de composition d'applications.

➥ Étudier l'injectivité d'une application $f : E \longrightarrow F$.

- ✪ Pour montrer qu'elle est injective : supposer que $(x_1, x_2) \in E^2$ et que $f(x_1) = f(x_2)$, puis montrer que $x_1 = x_2$.
- ✪ Pour montrer qu'elle n'est pas injective : donner deux valeurs distinctes de x_1 et x_2 dans E telles que $f(x_1) = f(x_2)$.
- ✪ Pour montrer qu'elle est injective, on peut aussi l'écrire comme une composée de deux injections.

➥ Étudier la surjectivité d'une application $f : E \longrightarrow F$.

- ✪ Pour montrer qu'elle est surjective : supposer que $y \in F$ et montrer l'existence de $x \in E$ tel que $y = f(x)$.
- ✪ Pour montrer qu'elle n'est pas surjective : donner une valeur de y dans F pour laquelle $y \neq f(x)$ pour tout $x \in E$.
- ✪ Pour montrer qu'elle est surjective, on peut aussi l'écrire comme une composée de deux surjections.

➥ Montrer la bijectivité d'une application $f : E \longrightarrow F$.

- ✪ Montrer qu'elle est injective et surjective.
- ✪ Supposer que $y \in F$ et montrer l'existence d'un unique $x \in E$ tel que $y = f(x)$.
- ✪ Montrer que f est inversible en donnant $g : F \longrightarrow E$ telle que $g \circ f = \mathrm{id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{id}_F$, puis conclure avec le théorème de la bijection réciproque.
- ✪ Si $E = I$ intervalle de $\mathbb{R}$ et $F = f(I)$, utiliser le théorème de la bijection monotone.
- ✪ L'écrire comme une composée de deux bijections, ou comme une application réciproque.

➥ Déterminer l'application réciproque d'une application $f : E \longrightarrow F$, c'est-à-dire calculer $f^{-1}(y)$ pour $y \in F$ (ce qui va prouver sa bijectivité).

- ✪ Supposer que $y \in F$ et montrer l'existence d'un unique $x \in E$ tel que $y = f(x)$: dans ce cas $f^{-1}(y) = x$.
- ✪ Donner $g : F \longrightarrow E$ telle que $g \circ f = \mathrm{id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{id}_F$: dans ce cas $f^{-1} = g$.
- ✪ Dans le cas où la bijectivité de f est connue, donner $g : F \longrightarrow E$ telle que $g \circ f = \mathrm{id}_E$ ou telle que $f \circ g = \mathrm{id}_F$: dans ce cas $f^{-1} = g$.
- ✪ L'écrire comme une composée de deux bijections, et utiliser la formule d'inversion d'une composée.

➥ Connaître les définitions de l'images directe d'une partie, de l'image réciproque d'une partie, et de partie stable.

➥ Connaître la définition d'une relation d'équivalence.

6 Exercices

Logique et raisonnements

EXERCICE 1. Quantificateurs et connecteurs

Écrire avec les quantificateurs et les connecteurs appropriés les propositions mathématiques suivantes :

1. Il existe un rationnel compris entre $\sqrt{3}$ et $\sqrt{5}$.
2. Il n'existe pas d'entier naturel supérieur ou égal à tous les autres.
3. Si la somme de deux entiers naturels est nulle, alors ces deux entiers naturels sont nuls.

EXERCICE 2. Un peu de logique

Les propositions suivantes sont-elles vraies? Sinon donner leur négation :

1. $\exists A \in \mathbb{R}_+^*;\ \forall n \in \mathbb{N},\ \sqrt{n} \leqslant A$
2. $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \exists n \in \mathbb{N}^*;\ \frac{1}{n} \leqslant x$
3. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}^*;\ \frac{1}{n} \leqslant x$

EXERCICE 3. Des maths vers le français

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur I et à valeurs réelles. Exprimer en français les prédicats suivants :

1. $\exists C \in \mathbb{R}; \forall x \in I, f(x) = C$
2. $\forall x \in I, \Big(f(x) = 0 \Longrightarrow x = 0\Big)$
3. $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in I; f(x) = y$
4. $\forall (x, y) \in I^2, \Big(x \leq y \Longrightarrow f(x) \leq f(y)\Big)$
5. $\forall (x, y) \in I^2, \Big(f(x) = f(y) \Longrightarrow x = y\Big)$

EXERCICE 4. Du français vers les maths

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur I et à valeurs réelles. Exprimer à l'aide de quantificateurs les assertions suivantes :

1. « la fonction f s'annule »
2. « la fonction f est la fonction nulle »
3. « f n'est pas une fonction constante »
4. « f ne prend jamais deux fois la même valeur »
5. « la fonction f présente un minimum »
6. « f prend des valeurs arbitrairement grandes »
7. « f ne peut s'annuler qu'une seule fois »

EXERCICE 5. Raisonnements par récurrence

1. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $n! \geq 2^{n-1}$.
2. On définit une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $u_0 = u_1 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n$. Établir que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2^{n+1} + (-1)^n$$
3. On définit une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, $u_2 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+3} = 7u_{n+2} - 16u_{n+1} + 12u_n$. Établir que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = -2 \times 3^n + 2^{n+1} + 3n2^{n-1}$$

EXERCICE 6. La différence symétrique de deux parties

Soit E un ensemble. Pour toutes parties A et B de E, on pose :
$$A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

1. Montrer que : $A\Delta B = (A\setminus B) \cup (B\setminus A)$.
2. Soient A, B et C trois parties de E vérifiant : $A\Delta B = A\Delta C$. Montrer que : $B = C$.
Si $A \cup B = A \cup C$ peut-on dire que $B = C$?

EXERCICE 7. Ensemble des parties d'un ensemble

1. Déterminer $\mathscr{P}(E)$ pour $E = \{a, b, c, d\}$; a, b, c, d étant distincts deux à deux.
2. Déterminer $\mathscr{P}(E)$ et $\mathscr{P}(\mathscr{P}(E))$ pour un ensemble à deux éléments.

EXERCICE 8. Équations ensemblistes

Soient E un ensemble et A, B et C trois parties de E.

1. Montrer que : $\overline{A} \subset B \iff A \cup B = E$.
2. Démontrer que : $\begin{cases} A \cup B = A \cup C \\ A \cap B = A \cap C \end{cases} \iff B = C$.
3. Démontrer que : $\begin{cases} A \cup B = A \cap C \\ A \cap B = A \cup C \end{cases} \iff A = B = C$.

EXERCICE 9. Une nouvelle opération sur les parties d'un ensemble

Soit E un ensemble non vide.
Si A et B sont deux parties de E, on pose $A * B = \left(A \cap B\right) \cup \left(\overline{A} \cap \overline{B}\right)$, où $\overline{A}$ désigne le complémentaire de A dans E.

1. Représenter sur un dessin l'ensemble $A * B$.
2. Soient A, B, C trois parties de E.
   (a) Calculer $A * A$ et $A * E$.
   (b) Vérifier que : $A * B = B * A$. Comment s'appelle cette propriété ?
   (c) Montrer que : $(A * B) * C = A * (B * C)$. Comment s'appelle cette propriété ?

3. Soient A, B, C trois parties de E. Démontrer les formules suivantes :
   (a) $A * B = \overline{A} * \overline{B}$.
   (b) $\overline{A * B} = A * \overline{B} = \overline{A} * B$.
   (c) $A * B = A * C \Longrightarrow B = C$.

Applications

EXERCICE 10. Théorème de la bijection monotone

On considère l'application f définie par :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin(x) + 2x \end{array}$$

1. Est-ce que l'application f est injective ? surjective ? bijective ?
2. Montrer que l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution réelle, et que cette solution est strictement positive.

EXERCICE 11. La fonction carré

On considère l'application :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$$

1. Est-elle injective sur $\mathbb{R}$? surjective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^+$?
2. Montrer que $f_{|\mathbb{R}^+}$ est bijective de $\mathbb{R}^+$ sur $\mathbb{R}^+$ et déterminer son application réciproque.
3. De même montrer que $f_{|\mathbb{R}^-}$ est bijective de $\mathbb{R}^-$ sur $\mathbb{R}^+$ et déterminer son application réciproque.
4. f est-elle injective sur $\mathbb{N}$? bijective de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}$? de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{N}$?

EXERCICE 12. Une homographie

On considère l'application :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\backslash\{1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x-2}{x-1} \end{array}$$

Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$, $f(f(x)) = x$. Que peut-on en déduire ?

EXERCICE 13. Inversibilité à gauche ou à droite pour la loi de composition

Soient E, F deux ensembles et $f : E \to F$ et $g : F \to E$ deux applications.

1. Montrer que si $g \circ f = Id_E$, alors g est surjective et f est injective.
2. On suppose que $g \circ f = Id_E$, et que l'une des deux applications f ou g est bijective. Montrer que l'autre est aussi bijective.
3. Monter que si $g \circ f$ et $f \circ g$ sont bijectives, alors f et g sont bijectives.

EXERCICE 14. Réciproques partielles pour les composées d'injection/surjection

Soient E, F, G trois ensembles et $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications.

1. Montrer que : $g \circ f$ injective $\Longrightarrow$ f injective.
2. Montrer que : $g \circ f$ surjective $\Longrightarrow$ g surjective.
3. Montrer que : $\Big(g \circ f$ injective et f surjective $\Big) \Longrightarrow g$ injective.
4. Montrer que : $\Big(g \circ f$ surjective et g injective $\Big) \Longrightarrow f$ surjective.

EXERCICE 15. Applications idempotentes

Soient E un ensemble quelconque et $g : E \longrightarrow E$ une fonction *idempotente*, c'est-à-dire telle que $g \circ g = g$.
Montrer que les propositions suivantes sont deux à deux équivalentes :
(i) g est injective;
(ii) g est surjective;
(iii) g est la fonction identité de E.

EXERCICE 16. Une variante

Soient E un ensemble quelconque et $f : E \longrightarrow E$ une fonction telle que $f \circ f \circ f = f$.
Montrer que les propositions suivantes sont deux à deux équivalentes :
(i) f est injective;
(ii) f est surjective;
(iii) f est bijective.

EXERCICE 17. Applications et produits cartésiens

Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : E \longrightarrow G$ deux applications. On considère l'application suivante :

$$h : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \times G \\ x & \longmapsto & \big(f(x), g(x)\big) \end{array}$$

1. Montrer que si f ou g est injective alors h l'est aussi. La réciproque est-elle vraie?
2. Montrer que si h est surjective, alors f et g le sont aussi. La réciproque est-elle vraie?

Dans la recherche de contre-exemples, on pourra considérer les fonctions $f : x \in \mathbb{R} \longrightarrow x^2 \in \mathbb{R}^+$ et $g : x \in \mathbb{R} \longrightarrow (x-1)^2 \in \mathbb{R}^+$.

EXERCICE 18. Propriétés des images directes et réciproques

Soient E, F deux ensembles et $f : E \to F$ une application. On considère A_1 et A_2 deux parties de E et B_1 et B_2 deux parties de F.

1. (a) Si f est injective sur E, montrer que : $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$.
2. (a) Si f est injective sur E, montrer que : $f\big(E \setminus A_1\big) \subset F \setminus f(A_1)$.
   (b) Si f est surjective de E sur F, montrer que : $F \setminus f(A_1) \subset f\big(E \setminus A_1\big)$.
   (c) Si f est bijective de E sur F, montrer que : $f\big(E \setminus A_1\big) = F \setminus f(A_1)$.
3. (a) Si f est injective sur E, montrer que : $f^{-1}\big(f(A_1)\big) = A_1$.
   (b) Si f est surjective de E sur F, montrer que : $f\big(f^{-1}(B)\big) = B$.

EXERCICE 19. Parties stables par une application

Soient E un ensemble et $h : E \longrightarrow E$ une application.
On dit qu'une partie X de E est <u>h-stable</u> (on dit aussi <u>stable par h</u>) si et seulement si $h(X) \subset X$.

1. Dans cette question, on suppose que h est constante, c'est-à-dire qu'il existe $a \in E$ tel que : $\forall x \in E,\ h(x) = a$.
   Montrer que, si $A \in \mathscr{P}(E)$: A est h-stable $\Longleftrightarrow a \in A$.
2. On se replace dans le cas général $h : E \longrightarrow E$.
   (a) Montrer que si A_i, $i \in I$, sont des parties h-stables, alors $\bigcup_{i\in I} A_i$ est h-stable.
   (b) Établir le même type de résultat pour l'intersection.
3. Soit X une partie de E. On pose $C(X) = \left\{A \in \mathscr{P}(E) \big/ \ A \text{ est } h-\text{stable et } X \subset A\right\}$ et $m(X) = \bigcap_{A\in C(X)} A =$ intersection de tous les parties A qui appartiennent à $C(X)$.
   (a) Montrer que $E \in C(X)$.
   (b) Vérifier que $m(X) \in C(X)$.
   (c) Dans le cas où X est h-stable, montrer que $m(X) = X$.

EXERCICE 20. Par analyse-synthèse

Montrer que toute fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ se décompose de manière unique en la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Sujets de synthèse

EXERCICE 21. Propriétés d'une mesure sur un ensemble E

Soient E un ensemble non vide et $m : \mathscr{P}(E) \longrightarrow \mathbb{R}^+$ telle que

$$\forall (A,B) \in \mathscr{P}(E)^2, \quad A \cap B = \emptyset \implies m(A\cup B) = m(A) + m(B)$$

Démontrer les propriétés suivantes :

1. $m(\emptyset) = 0$
2. $\forall (A,B) \in \mathscr{P}(E)^2, \quad m(A\cup B) = m(A) + m(B) - m(A\cap B)$
3. $\forall (A,B) \in \mathscr{P}(E)^2, \quad A \subset B \implies m(A) \leqslant m(B)$

EXERCICE 22. Une application ensembliste

Soit E un ensemble. Soient A et B deux parties non vides de E. On note $\mathscr{P}(E)$ l'ensemble des parties de E. On définit l'application suivante :

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathscr{P}(E) & \longrightarrow & \mathscr{P}(A) \times \mathscr{P}(B) \\ & X & \longmapsto & (X\cap A, X\cap B) \end{array}$$

1. Déterminer $f(E)$, $f(\emptyset)$, $f(A)$, $f(B)$, $f(A\cup B)$, $f(A\cap B)$.

2. (a) On suppose que f est injective. En déduire une relation entre A, B et E.
   (b) On suppose que $A \cup B = E$. Montrer que f est injective.
3. (a) Soit $X \in \mathscr{P}(E)$ tel que $X \cap A = A$. Quelle relation y a-t-il entre A et X ?
   (b) Soit $X \in \mathscr{P}(E)$ tel que $X \cap B = \emptyset$. Quelle relation y a-t-il entre B et X ?
   (c) On suppose que f est surjective de $\mathscr{P}(E)$ sur $\mathscr{P}(A) \times \mathscr{P}(B)$. Montrer que $A \cap B = \emptyset$.
4. On suppose que $A \cap B = \emptyset$.
   Soit Y une partie de A et Z une partie de B, déterminer $f(Y \cup Z)$.
5. Déterminer une condition nécesaire et suffisante sur les parties A et B, pour que f soit bijective. Dans ce cas donner l'application réciproque de f.

EXERCICE 23. Applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$

Soit p un entier naturel.
Le but de cet exercice est de déterminer s'il existe une application $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ telle que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $f \circ f(n) = n + p$.
Cas I : p est pair.
Donner un exemple d'une telle application dans le cas où p est pair.
Cas II : p est impair.
Dans le cas où p est impair, on se donne une application $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ telle que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $f \circ f(n) = n + p$.
On note $I = [\![0, p-1]\!] = \{0, \dots, p-1\}$. On note aussi $I_1 = I \cap f^{-1}(I) = \{i \in I / \ f(i) \in I\}$ et $I_2 = I \cap f^{-1}\big([\![p, +\infty[\![\big) = \{j \in I / \ f(j) \geqslant p\}$.

1. Montrer que f est injective sur $\mathbb{N}$.
2. (a) Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer de deux manières différentes $f \circ f \circ f(n)$. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n+p) = f(n) + p$.
   (b) Vérifier alors que, pour tout $j \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}$, $f(n + jp) = f(n) + jp$.
3. Montrer que $I = I_1 \cup I_2$ et que $I_1 \cap I_2 = \emptyset$.
4. (a) Montrer que $f(I_1) \subset I_2$.
   (b) Soit $j \in I_2$. Notons $k = f(j) - p$. À l'aide de la question 2.(a), établir que $j = f(k)$.
   (c) En déduire que $f(I_1) = I_2$.
5. (a) Déduire des questions 1. et 4.(c) que f induit une bijection de I_1 sur I_2 (c'est-à-dire que $f_{|I_1}$ est bijective de I_1 sur I_2).
   (b) Grâce à la question 3., en déduire que Card(I) est pair.
   (c) Conclure.

EXERCICE 24. Une autre application ensembliste

On fixe, dans tout l'exercice, un ensemble E et deux parties A et B de cet ensemble.
Si X est une partie de E, on note $f(X) = \big(X \cap A\big) \cup B$.
On définit ainsi une application $f : \mathscr{P}(E) \longrightarrow \mathscr{P}(E)$.

1. (a) On suppose, pour cette question, $A = \emptyset$. Calculer $f(X)$ pour tout $X \in \mathscr{P}(E)$.
   (b) Même question si $B = E$. Que remarque-t-on dans ces deux cas particuliers ?

(c) Calculer, dans le cas général où A et B sont deux parties quelconques de E : $f(\emptyset)$, $f(A)$, $f(B)$ et $f(E)$.

2. (a) Montrer que la fonction f est croissante au sens de l'inclusion, c'est-à-dire que, pour X et X' deux parties de E vérifiant $X \subseteq X'$, on a $f(X) \subseteq f(X')$.

   (b) Soit Y une partie de E. Montrer que les propositions suivantes sont deux à deux équivalentes :
   (i) Y admet un antécédent dans $\mathscr{P}(E)$ pour la fonction f ;
   (ii) $B \subseteq Y \subseteq A \cup B$;
   (iii) $f(Y) = Y$.

3. (a) Résoudre l'équation $f(X) = A$ (où l'inconnue X est une partie de E).

   (b) Résoudre l'équation $f(X) = B$.

4. (a) Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur les parties A et B pour que la fonction f soit constante.

   (b) Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur les parties A et B pour que la fonction f soit surjective.

   (c) Déterminer que cette dernière est aussi une condition nécessaire et suffisante sur les parties A et B pour que la fonction f soit injective.

EXERCICE 25. Théorème de Cantor-Bernstein

Soient M et N deux ensembles. On suppose qu'il existe une **injection** $f : M \longrightarrow N$ et une **injection** $g : N \longrightarrow M$. On souhaite démontrer qu'il existe une **bijection** $\varphi : M \longrightarrow N$.
On définit l'application

$$F : \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(M) & \longrightarrow & \mathscr{P}(M) \\ A & \longmapsto & F(A) = M \backslash g\big(N \backslash f(A)\big) \end{array}$$

1. (a) Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties de M. Montrer que $f\Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big) = \bigcap_{i\in I} f(A_i)$.

   (b) Soit $(B_i)_{i\in I}$ une famille de parties de N. Montrer que $g\Big(\bigcup_{i\in I} B_i\Big) = \bigcup_{i\in I} g(B_i)$.

   (c) En déduire que si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille de parties de M, alors $F\Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big) = \bigcap_{i\in I} F(A_i)$.

2. Dans la suite on pose $F^0 = \mathrm{id}_{\mathscr{P}(M)}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$: $F^{k+1} = F \circ F^k$.

   (a) Démontrer que F est croissante pour l'inclusion.

   (b) Établir par récurrence que : $\forall k \in \mathbb{N}, \quad F^{k+1}(M) \subseteq F^k(M)$

3. On définit E comme étant l'ensemble $E = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} F^k(M)$.

   (a) Montrer que E est une partie de M.

   (b) Montrer que $F(E) = E$.

   (c) En déduire que si $x \in M$ et $x \notin E$, alors x a un unique antécédent $y_x \in N$ par la fonction g. De plus, vérifier que $y_x \notin f(E)$.

4. Dans cette question on considère l'application $\varphi : M \longrightarrow N$ définie par :

$$\forall x \in M, \quad \varphi(x) = \begin{cases} f(x) \text{ si } x \in E \\ y_x \text{ si } x \notin E \end{cases}$$

où y_x a été défini à la question 3.(c).

(a) Montrer que $g^{-1}(M \backslash E) = N \backslash \big(f(E)\big)$. En déduire que φ est surjective de M vers N.

(b) Montrer que $\varphi_{|E}$ est injective sur E et que $\varphi_{|M \backslash E}$ est injective sur $M \backslash E$. En déduire que φ est injective sur M. Conclure