# Chapitre 12

# Dérivabilité des fonctions numériques

## Sommaire


**1 Dérivabilité d'une fonction numérique . . . . . . 324**
- 1.1 Dérivabilité en un point . . . . . . 324
- 1.2 Dérivabilité à droite ou à gauche en un point . . . . . . 325
- 1.3 Interprétations graphiques . . . . . . 326
- 1.4 Propriétés des fonctions dérivables un point . . . . . . 327

**2 Dérivabilité sur un intervalle . . . . . . 328**
- 2.1 Définition et théorèmes généraux . . . . . . 328
- 2.2 Dérivabilité des fonctions usuelles . . . . . . 329
- 2.3 Opérations sur les fonctions dérivables . . . . . . 330

**3 Propriétés des fonctions numériques dérivables . . . . . . 332**
- 3.1 Lien entre extremum et dérivée . . . . . . 332
- 3.2 Théorème de Rolle . . . . . . 332
- 3.3 Théorème des accroissements finis . . . . . . 333
- 3.4 Lien entre dérivée et monotonie . . . . . . 334
- 3.5 Théorème de la limite de la dérivée . . . . . . 335

**4 Dérivées d'ordre supérieur . . . . . . 336**
- 4.1 Dérivées successives . . . . . . 336
- 4.2 Fonctions de classe $C^n$, de classe $C^\infty$ . . . . . . 337
- 4.3 Opérations sur les fonctions de classe $C^n/C^\infty$ . . . . . . 338
- 4.4 Classe de régularité des fonction usuelles . . . . . . 339
- 4.5 Formule de Taylor-Young . . . . . . 340
- 4.6 Brève extension aux fonctions à valeurs complexes . . . . . . 341

**5 Compétences à acquérir sur ce chapitre . . . . . . 343**

**6 Exercices . . . . . . 344**

# 1 Dérivabilité d'une fonction numérique

$f$ est une fonction définie sur un intervalle $I$ ; cet intervalle est supposé non vide et non réduit à un point.

## 1.1 Dérivabilité en un point

Soit $a$ un point de $I$.

**Définition 1 – Dérivabilité en un point**

On dit que $f$ est *dérivable en a* lorsque $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et est finie.

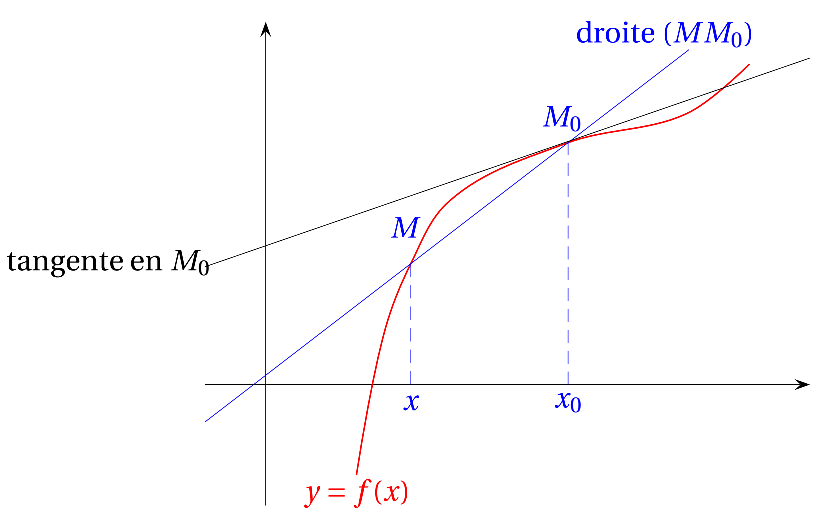
Dans ce cas, on pose : $f'(a) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \dfrac{f(a)-f(x)}{a-x}$.

Le réel $f'(a)$ est appelé *nombre dérivé* de $f$ en $a$. On le note aussi $\dfrac{df}{dx}(a)$.

On peut toujours se ramener au voisinage de 0, en posant $x = a+h$ :

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$$

**Interprétation graphique :** $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ représente la pente de la droite passant par les points $M\big(x, f(x)\big)$ et $M_0\big(a, f(a)\big)$. $f'(a)$ représente donc la « pente limite » en $M_0\big(a, f(a)\big)$, c'est-à-dire la pente de la tangente à la courbe de $f$ au point $M_0\big(a, f(a)\big)$.



✎ ***Exemple.*** $f : x \longmapsto px + q$ avec $(p,q) \in \mathbb{R}^2$. Alors $f$ est dérivable en tout $a \in \mathbb{R}$ et $f'(a) = p$.

✎ ***Exemple.*** $f : x \longmapsto x^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. Alors $f$ est dérivable en tout $a \in \mathbb{R}$ et $f'(a) = na^{n-1}$.

✎ ***Exemple.*** $f : x \longmapsto \cos(x)$. Alors $f$ est dérivable en tout $a \in \mathbb{R}$ et $f'(a) = -\sin(a)$.

✎ ***Exemple.*** $f : x \longmapsto \sin(x)$. Alors $f$ est dérivable en tout $a \in \mathbb{R}$ et $f'(a) = \cos(a)$.

✎ ***Exemple.*** $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x}$. Alors $f$ est dérivable en tout $a \in \mathbb{R}^*$ et $f'(a) = -\dfrac{1}{a^2}$.

✎ ***Exemple.*** $f : x \longmapsto \sqrt{x}$. Alors $f$ est dérivable en tout $a > 0$ et $f'(a) = \dfrac{1}{2\sqrt{a}}$.

**Proposition 2 – Dérivabilité et DL**

$f$ est dérivable en $a$ si, et seulement si, $f$ admet un DL d'ordre 1 au point $a$.

Dans ce cas :

$$f(a+h) = f(a) + f'(a) \times h + o_{h\to 0}(h)$$

**Corollaire 3 – La dérivabilité entraîne la continuité**

Si $f$ est dérivable en $a$, alors $f$ est continue en $a$.

## 1.2 Dérivabilité à droite ou à gauche en un point

Soit $a$ un point de $I$.

**Définition 4 – Dérivabilité à droite en un point**

On dit que $f$ est *dérivable à droite en $a$* lorsque $\displaystyle\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et est finie.

Dans ce cas, on pose : $f'_d(a) = \displaystyle\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

Le réel $f'_d(a)$ est appelé *nombre dérivé à droite* de $f$ en $a$.

On définit de même la *dérivabilité à gauche en $a$* lorsque $\displaystyle\lim_{x\to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et est finie. La limite est notée $f'_g(a)$ et est appelée *nombre dérivé à gauche* de $f$ en $a$.

**Théorème 5 – Lien entre dérivabilité en un point et dérivabilité à droite/gauche**

On suppose que $a$ n'est pas une extrémité de $I$. Alors on a équivalence de :

(i) $f$ est dérivable en $a$ ;

(ii) $f$ est dérivable à droite et à gauche en $a$ avec $f'_g(a) = f'_d(a)$.

Dans ce cas $f'(a) = f'_g(a) = f'_d(a)$.

✎ ***Exemple.*** $f : x \longmapsto |x|$ n'est pas dérivable en 0.

✎ ***Exemple.*** $f : x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x\sin(x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$ est dérivable en 0.

## 1.3 Interprétations graphiques

• **Cas $f$ dérivable en $a$.** $\mathscr{C}_f$ admet une tangente au point $M_0\big(a, f(a)\big)$ d'équation : $y = f'(a) \times (x-a) + f(a)$. Dans ce cas on peut utiliser un $DL_n(a)$ pour positionner localement en $a$ la courbe de $f$ et sa tangente au point $a$.

✎ ***Exemple.*** Faire l'étude locale en 0 de la position de la courbe par rapport à sa tangente pour $x \longmapsto e^x$ et $x \longmapsto \arctan(x)$.

• **Cas $f$ non dérivable en $a$.** Il y a plusieurs cas possibles.

- ⋆ Si $f$ est dérivable à droite en $a$, alors elle admet une demi-tangente à droite en $a$ d'équation $y = f'_d(a) \times (x-a) + f(a)$.
- ⋆ Si $f$ est dérivable à gauche en $x_0$, alors elle admet une demi-tangente à gauche en $a$ d'équation $y = f'_g(a) \times (x-a) + f(a)$.
- ⋆ Si elle est dérivable à droite et à gauche en $a$, avec $f'_d(a) \neq f'_g(a)$, alors les deux demi-tangentes ne sont pas parallèles. On dit que $M_0\big(a, f(a)\big)$ est un *point anguleux*.

  ✎ ***Exemple.*** En 0 la représentation graphique de $x \longmapsto |x|$ admet un point anguleux.

- ⋆ Si $\displaystyle\lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} = \pm\infty$ alors $f$ n'est pas dérivable à droite en $a$, mais $\mathscr{C}_f$ admet quand même une demi-tangente verticale en $M_0\big(a, f(a)\big)$.
  On a le même résultat à gauche en $a$.

  ✎ ***Exemple.*** $x \longmapsto \sqrt{x}$ n'est pas dérivable à droite en 0, et sa courbe admet une tangente verticale en $O(0,0)$.

- ⋆ Si $\displaystyle\lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x-a}$ ou $\displaystyle\lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x-a}$ n'existe pas, il n'y a d'interprétation graphique.

## 1.4 Propriétés des fonctions dérivables un point

Dans ce paragraphe $a$ est un point de $I$.

En plus de la fonction $f$, on se donne pour le théorème suivant une fonction $g$ définie sur le même intervalle $I$.

**Théorème 6 – Opérations sur les fonctions dérivables en $a$**

On suppose que $f$ et $g$ sont dérivables en $a$. Dans ce cas :

1. pour tous réels $\lambda$ et $\mu$, la fonction $\lambda.f+\mu.g$ est dérivable en $a$ et :

$$\big(\lambda.f+\mu.g\big)'(a)=\lambda.f'(a)+\mu.g'(a)$$

2. la fonction $f\times g$ est dérivable en $a$ et :

$$(f\times g)'(a)=f'(a)\times g(a)+f(a)\times g'(a)$$

3. si $g$ ne s'annule pas, la fonction $\dfrac{f}{g}$ est dérivable en $a$ et :

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a)=\frac{f'(a)\times g(a)-f(a)\times g'(a)}{g(a)^2}$$

⚠ Si $f$ ou $g$ n'est pas dérivable en $a$ alors il est possible que les fonctions $f+g$, $f\times g$ et $\dfrac{f}{g}$ le soient quand même.

✎ ***Exemple.*** $x\longmapsto\sqrt{x}-\sqrt{x}$ est dérivable en 0 alors que $x\longmapsto\sqrt{x}$ ne l'est pas.

Dans le théorème suivant on suppose que $f$ est à valeurs dans un intervalle $J$, et que $g$ est une fonction définie sur cet intervalle $J$. La fonction $g\circ f$ est donc définie sur l'intervale $I$.

**Théorème 7 – Composition de fonctions dérivables**

On suppose que $f$ est dérivable en $a$, et que $g$ est dérivable en $b=f(a)$. Dans ce cas, la fonction $g\circ f$ est dérivable en $a$ et :

$$(g\circ f)'(a)=f'(a)\times g'\big(f(a)\big)$$

⚠ Ne pas dire que $f$ et $g$ sont toutes les deux dérivables en $a$; à priori $g$ n'est pas même pas définie au point $a$. $g$ doit être dérivable en $b=f(a)$.

⚠ Si $f$ n'est pas dérivable en $a$ ou si $g$ n'est pas dérivable en $f(a)$ alors il est possible que $g\circ f$ soit tout de même dérivable en $a$.

✎ ***Exemple.*** $x\longmapsto\sqrt{x^4}$ est dérivable en 0 bien que $x\longmapsto\sqrt{x}$ ne le soit pas.

En pratique, on fera appel aux deux théorèmes précédents sous le nom de *théorèmes généraux*.

# 2 Dérivabilité sur un intervalle

$f$ est une fonction définie sur un intervalle $I$ ; cet intervalle est supposé non vide et non réduit à un point.

## 2.1 Définition et théorèmes généraux

**Définition 8 – Dérivabilité sur un intervalle**

On dit que $f$ est dérivable sur l'intervalle $I$ lorsque $f$ est dérivable en tout point $a \in I$.

✎ ***Exemple.*** $f$ dérivable sur $[0,+\infty[$ signifie que $f$ est dérivable en tout $a > 0$, et que $f$ est dérivable à droite en 0.

✎ ***Exemple.*** $f$ dérivable sur $]0,+\infty[$ signifie que $f$ est dérivable en tout $a > 0$.

✎ ***Exemple.*** $f$ dérivable sur $]1,2]$ signifie que $f$ est dérivable en tout $a \in ]1,2[$, et que $f$ est dérivable à gauche en 2.

**Définition 9 – Dérivabilité sur une union d'intervalles**

On se donne une famille d'intervalles $(I_j)_{j\in J}$ deux à deux disjoints, et tels que l'union de deux d'entre eux ne donne pas un intervalle.
On dit que $f$ est dérivable sur $A = \bigcup\limits_{j\in J} I_j$ lorsque, pour tout $j \in J$, $f$ est dérivable sur $I_j$.

✎ ***Exemple.*** $f$ dérivable sur $\mathbb{R}^*$ signifie que $f$ est dérivable sur $]-\infty,0[$ et sur $]0,+\infty[$, donc que $f$ est dérivable en tout $a < 0$ et en tout $a > 0$.

⚠ Si $f$ est dérivable sur deux intervalles $I$ et $J$ alors elle peut ne pas être dérivable sur leur union $I \cup J$ (si $I \cup J$ est encore un intervalle).
Par exemple si $f$ dérivable sur $]-\infty,0[$ et $[0,+\infty[$ alors $]-\infty,0[\cup[0,+\infty[=\mathbb{R}$, mais $f$ peut ne pas être dérivable sur $\mathbb{R}$ car on ne sait pas si elle est dérivable à gauche en 0.

⚠ Le raisonnement naïf consistant à calculer $f'(x)$ et à regarder pour quelles valeurs de $x$ cette fonction est définie est faux. Il ne donne pas la dérivabilité de la fonction.
Par exemple le raisonnement :
« pour $f(x) = \sqrt{x}$, on a $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, et donc $f$ n'est pas dérivable à droite en 0 »
n'est pas correct (même s'il donne le bon résultat).

**Définition 10 – Fonction dérivée**

Si $f$ est dérivable sur une partie $A$ de $\mathbb{R}$, on appelle fonction dérivée de $f$ l'application :

$$f' : \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f'(x) \end{array}$$

**Théorème 11 – Une fonction dérivable est continue**

Si $f$ est dérivable sur une partie $A$ de $\mathbb{R}$, alors $f$ est continue sur $A$.

## 2.2 Dérivabilité des fonctions usuelles

• La fonction $x \longmapsto \lfloor x \rfloor$ est dérivable sur $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}$. Aux points de $\mathbb{Z}$, elle est seulement dérivable à droite.

• Les fonctions polynômes sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

✎ ***Exemple.*** La fonction $x \longmapsto x^3 - x + 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

• Les fractions rationnelles ( = quotient de polynômes) sont dérivables sur leur ensemble de définition.

✎ ***Exemple.*** La fonction $x \longmapsto \dfrac{x^5+3x^2+2x-1}{(x-1)^3 x}$ est dérivable sur $\mathbb{R} \backslash \{0;1\}$ et la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x^2+x+1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

• Les fonctions cos et sin sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

• Les fonctions arccos et arcsin sont dérivables sur $]-1,1[$ et ne le sont pas en $-1$ et $1$.

• La fonction tan est dérivable sur $\mathscr{D}_{\tan} = \mathbb{R} \backslash \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

• La fonction arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$.

• La fonction ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et la fonction exp est dérivable sur $\mathbb{R}$.

• Les fonctions ch et sh sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

• La fonction $x \longmapsto |x|$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Elle n'est pas dérivable en 0.

• Les fonctions $x \longmapsto x^\alpha$, où $\alpha \in \mathbb{R}$, sont dérivables au moins sur $\mathbb{R}_+^*$. En 0, on a le résultat suivant.

**Théorème 12 – Dérivabilité de la fonction $x \longmapsto x^\alpha$ en 0**

1. Pour $\alpha \geq 1$, la fonction $x \longmapsto x^\alpha$ est dérivable en 0 et :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad \frac{d}{dx}\left(x^\alpha\right) = \alpha x^{\alpha-1}$$

2. Pour $\alpha < 1$ et $\alpha \neq 0$, la fonction $x \longmapsto x^\alpha$ n'est pas dérivable en 0.

Pour $\alpha = 0$, la fonction est constante, donc dérivable sur $\mathbb{R}$.

✎ ***Exemple.*** $x \longmapsto \sqrt{x}$ continue sur $\mathbb{R}^+$ mais dérivable seulement sur $\mathbb{R}_+^*$, et $x \longmapsto x^{\frac{3}{2}}$ dérivable sur $\mathbb{R}^+$.

⚠ Pour des puissances entières, l'ensemble de dérivabilité peut être beaucoup plus grand que $\mathbb{R}^+$ ou $\mathbb{R}_+^*$.
Par exemple $x \longmapsto x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$ (polynôme), et $x \longmapsto \dfrac{1}{x^3}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ (fraction rationnelle).

On peut donc retenir que pour $0 < \alpha < 1$, la fonction $x \longmapsto x^\alpha$ est continue mais non dérivable (à droite) en 0.

## 2.3 Opérations sur les fonctions dérivables

En plus de la fonction $f$, on se donne pour le théorème suivant une fonction $g$ définie sur le même intervalle $I$.

**Théorème 13 – Opérations sur les fonctions dérivables en $a$**

On suppose que $f$ et $g$ sont dérivables sur $I$. Dans ce cas :

1. pour tous réels $\lambda$ et $\mu$, la fonction $\lambda.f + \mu.g$ est dérivable sur $I$ ;
2. la fonction $f \times g$ est dérivable sur $I$ ;
3. si $g$ ne s'annule pas sur $I$, la fonction $\dfrac{f}{g}$ est dérivable sur $I$.

Dans le théorème suivant on suppose que $f$ est à valeurs dans un intervalle $J$, et que $g$ est une fonction définie sur cet intervalle $J$. La fonction $g \circ f$ est donc définie sur l'intervale $I$.

**Théorème 14 – Composition de fonctions dérivables**

On suppose que $f$ est dérivable sur $I$, et que $g$ est dérivable sur $J$. Dans ce cas, la fonction $g \circ f$ est dérivable sur $I$.

⚠ Ne pas dire que $f$ et $g$ sont toutes les deux dérivables sur $I$ ; à priori $g$ n'est pas même pas définie sur $I$. $g$ doit être dérivable sur $J$ tel que $f(I) \subseteq J$.

En pratique, on fera appel aux deux théorèmes précédents sous le nom de *théorèmes généraux*.

**Important.** Pour démontrer simplement qu'une fonction est dérivable, on utilisera désormais la dérivabilité des fonctions usuelles et les théorèmes précédents.

✎ ***Exemple.*** La fonction $\varphi : x \longmapsto \sqrt{\ln(1+x^4)}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

**Théorème 15 – Dérivabilité d'une bijection réciproque en un point**

On suppose que $f$ est une fonction continue et strictement monotone sur l'intervalle $I$. Soit $a \in I$ tel que $f$ est dérivable en $a$. Alors :

- si $f'(a) \neq 0$ alors $f^{-1}$ est dérivable en $b = f(a)$ et :

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(b)} = \frac{1}{f'(a)}$$

- si $f'(a) = 0$, alors $f^{-1}$ n'est pas dérivable en $b = f(a)$.

Dans le dernier cas, la courbe de $f^{-1}$ admet une tangente verticale au point d'abscisse $b$.

⚠ Si $f$ n'est pas dérivable en $a$, on ne peut rien dire sur la dérivabilité de $f^{-1}$ en $b = f(a)$. Par exemple $x \longmapsto \sqrt{x}$ n'est pas dérivable en 0, mais $x \longmapsto x^2$ l'est.

**Corollaire 16 – Dérivabilité d'une bijection réciproque sur un intervalle**

Soient $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f$ une fonction dérivable et strictement monotone sur $I$, et telle que $f'$ ne s'annule pas sur $I$.
Alors $f^{-1}$ est dérivable sur $J = f(I)$ et :

$$\forall y \in J, \quad \left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(y)}$$

✎ ***Exemple.*** arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$. arcsin et arccos sont dérivables sur $]-1,1[$ et ne sont pas dérivable en $-1$ et 1.

**Important**. Pour dériver une égalité du type $f(x) = g(x)$, il faut que celle-ci soit vraie pour tout $x$ dans un intervalle $I$ (et que $f$ et $g$ soient dérivables sur cet intervalle) :

$$\Big(\forall x \in I,\ f(x) = g(x)\Big) \implies \Big(\forall x \in I,\ f'(x) = g'(x)\Big)$$

Par contre si l'égalité n'est vraie qu'en un point, dériver revient à écrire $0 = 0$ (on dérive deux constantes). En particulier $\boxed{f(0) = 1 \text{ ne donne pas } f'(0) = 0.}$

# 3 Propriétés des fonctions numériques dérivables

Dans tout ce paragraphe, on considère une fonction $f$ définie sur un intervalle $I$.

## 3.1 Lien entre extremum et dérivée

**Théorème 17 – Condition nécessaire d'extremum local**

Soit $f$ fonction dérivable sur un intervalle $I$ et telle que :

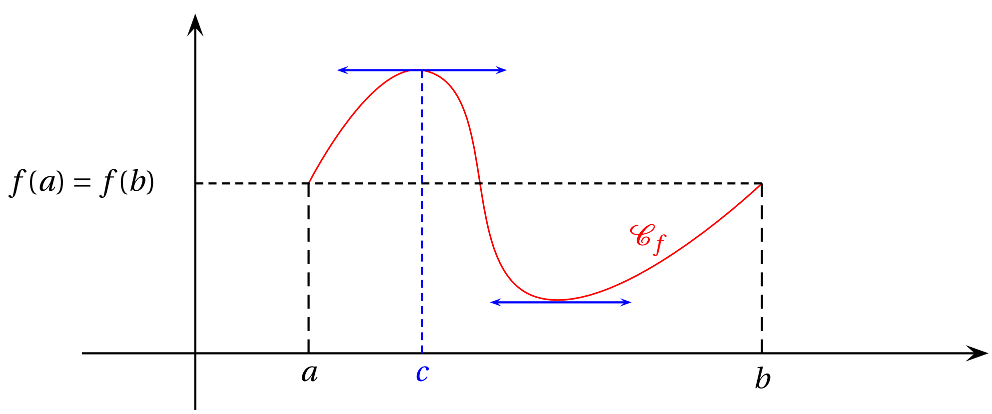
(i) $f$ admet un extremum local en $a \in I$ ;

(ii) $a \in \mathring{I}$, ie $a$ n'est pas une borne de $I$.

Alors $f'(a) = 0$. La tangente à la courbe représentative de $f$ au point d'abscisse $a$ est donc horizontale.

## 3.2 Théorème de Rolle

Intuitivement, pour une fonction $f$ vérifiant $f(a) = f(b)$, on voit sur la figure ci-dessous que sa courbe admet au moins une tangente horizontale.




**Théorème 18 – Théorème de Rolle**

Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :

(i) $f$ est continue sur $[a, b]$ ;

(ii) $f$ est dérivable sur $]a, b[$ ;

(iii) $f(a) = f(b)$.

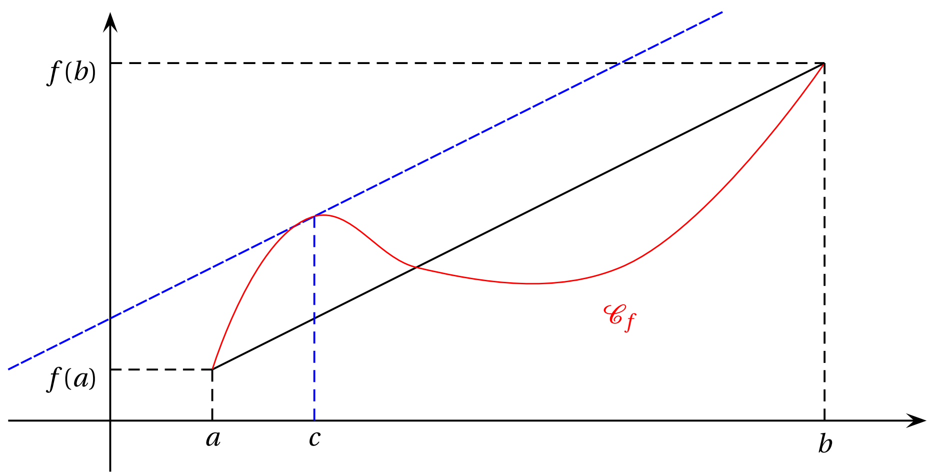
Alors :

$$\exists c \in ]a, b[;\ f'(c) = 0$$

✎ ***Exemple.*** Si $P \in \mathbb{R}[X]$ est scindé à racines simples, montrer que $P'$ est lui aussi scindé à racines simples. En considérant le polynôme $X^3 - 3X^2 + 3X$ montrer que ce résultat est faux dans $\mathbb{C}[X]$.

### 3.3 Théorème des accroissements finis

Intuitivement, pour une fonction $f$, on voit sur la figure ci-dessous que sa courbe admet au moins une tangente parallèle à la droite passant par les points $(a, f(a))$ et $(a, f(a))$.




**Théorème 19 – Théorème des accroissements finis**

Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :

(i) $f$ est continue sur $[a,b]$

(ii) $f$ est dérivable sur $]a,b[$

Alors :

$$\exists c \in ]a,b[;\ f'(c) = \frac{f(a)-f(b)}{a-b} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Ce théorème permet d'obtenir facilement des inégalités non triviales.

✎ ***Exemple.*** Montrer que pour tout $x \geq 0$, $\dfrac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x$.

**Corollaire 20 – Inégalité des accroissements finis**

On suppose que :

(i) $f$ est dérivable sur $I$

(ii) $\exists M \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall x \in I, |f'(x)| \leq M$

Alors :

$$\forall (x,y) \in I^2, \quad |f(y) - f(x)| \leq M \times |y - x|$$

Une fonction vérifiant l'inégalité précédente est appelée *fonction $M$-lispschitzienne.*

✎ ***Exemple.*** Montrer que : $\forall t \in \mathbb{R}, |\sin(t)| \leq |t|$.
On peut aussi montrer que $\forall t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right], \sin(t) \geq \dfrac{2}{\pi} t$.

## 3.4 Lien entre dérivée et monotonie

**Théorème 21 – Lien entre dérivée et monotonie au sens large**

Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Alors :

1. $f$ est croissante sur $[a, b] \iff \left(\forall x \in ]a, b[,\ f'(x) \geq 0\right)$
2. $f$ est décroissante sur $[a, b] \iff \left(\forall x \in ]a, b[,\ f'(x) \leq 0\right)$
3. $f$ est constante sur $[a, b] \iff \left(\forall x \in ]a, b[,\ f'(x) = 0\right)$

⚠ Ces résultats ne s'appliquent que sur un intervalle. La fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ a une dérivée négative sur $\mathbb{R}^*$, mais n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}^*$.

✎ ***Exemple.*** Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\arctan(x) + \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$

**Théorème 22 – Lien entre dérivée et stricte monotonie**

Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Alors :

1. $\left(\forall x \in ]a, b[,\ f'(x) > 0\right) \Longrightarrow f$ est strictement croissante sur $[a, b]$.
2. $\left(\forall x \in ]a, b[,\ f'(x) < 0\right) \Longrightarrow f$ est strictement décroissante sur $[a, b]$.

⚠ Les réciproques sont fausses. Considérer par exemple $f : x \longmapsto x^3$ sur $[-1, 1]$.

**Corollaire 23 – Lien entre dérivée et stricte monotonie sur un intervalle**

Soient $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :

(i) $f$ est continue sur $I$

(ii) $f$ est dérivable sur $I$ sauf éventuellement en des points isolés

Alors :

1. $f'(x) > 0$ pour tout $x \in I$ sauf éventuellement en des points isolés
   $\Longrightarrow f$ est strictement croissante sur $I$.
2. $f'(x) < 0$ pour tout $x \in I$ sauf éventuellement en des points isolés
   $\Longrightarrow f$ est strictement décroissante sur $I$.

## 3.5 Théorème de la limite de la dérivée

Soit $a$ un point de $I$ et $f$ une fonction dérivable sur l'intervalle $I$.

**Théorème 24 – Théorème de la limite de la dérivée (ou petite règle de l'Hospital)**

On suppose que :

(i) $f$ est continue sur $I$ ;

(ii) $f$ est dérivable sur $I \setminus \{a\}$ ;

(iii) $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f'(x) = \ell$ où $\ell$ est réel ou $\pm\infty$.

Dans ce cas, on a :

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell$$

Si $\ell$ est réel, alors $f$ est dérivable en $a$ avec $f'(a) = \ell$. Dans ce cas $f$ est donc dérivable sur tout l'intervalle $I$. Ce résultat n'est pas évident car $f'(a) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ alors que $\ell = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \left( \lim\limits_{\substack{t \to x \\ t \neq x}} \dfrac{f(t) - f(x)}{t - x} \right)$.

Si $\ell = \pm\infty$, alors $f$ n'est pas dérivable en $a$, et $\mathscr{C}_f$ admet des demi-tangentes verticales en ce point.

⚠ On peut donc corriger le raisonnement (faux) suivant :

*Pour* $f(x) = \sqrt{x}$, *on a* $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.
*On voit que* $\mathscr{D}_{f'} = \mathbb{R}_+^* *$ *donc* $f$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}_+^*$ *et n'est pas dérivable à droite en* $0$.

On peut désormais écrire :

$f : x \longmapsto \sqrt{x}$ *est continue sur l'intervalle* $I = \mathbb{R}^+$ *et dérivable sur* $I \setminus \{0\} = \mathbb{R}_+^*$,
*avec :* $\forall x > 0,\ f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.
*De plus* $\lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = +\infty$, *donc, d'après le théorème de la limite de la dérivée,*
$f$ *n'est pas dérivable à droite en* $0$ .

⚠ Ne pas dire qu'on prolonge la dérivée $f'$ par continuité. On ne lui donne pas une valeur arbitraire mais on calcule sa valeur en utilisant la définition du nombre dérivé. On ne dit pas **on choisit** $f'(a) = \ell$ mais **on trouve par le calcul** que $f'(a) = \ell$.

✎ ***Exemple.*** Déterminer le solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $x^2 y' - y = 0$.

⚠ Si $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f'(x)$ n'existe pas, alors on ne peut rien dire dans le cas général, le théorème ne s'applique pas.

✎ ***Exemple.*** Vérifier que le théorème de la limite de la dérivée ne s'applique pas avec la fonction $x \longmapsto x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ prolongée par continuité en 0.

**Corollaire 25 – Prolongement du caractère $C^1$**

On suppose que :

(i) $f$ est continue sur $I$ ;

(ii) $f$ est de classe $C^1$ sur $I \setminus \{a\}$ ;

(iii) $\lim\limits_{x \to a} f'(x) = \ell$ où $\ell$ est réel.

Dans ce cas, $f$ est de classe $C^1$ sur $I$ et les calculs donnent que $f'(a) = \ell$.

✎ ***Exemple.*** Soit la fonction $f$ définie par $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ e^{-1/x^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Montrer $f$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$.

# 4 Dérivées d'ordre supérieur

Dans cette section $A$ est une union d'intervalle de $\mathbb{R}$, deux à deux disjoints et tels que l'union de deux entre eux n'est pas un intervalle. $n$ est un entier naturel non nul.

On suppose que $f$ est une fonction définie sur $A$.

## 4.1 Dérivées successives

On suppose que $n \in \mathbb{N}^*$ et que $f$ est une fonction $n$ fois dérivable sur la partie $A$.

**Définition 26 – Dérivées successives**

On définit la dérivée $n$-ième de $f$ sur $A$ par récurrence :

$$f^{(0)} = f \quad \text{et} \quad f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)'$$

On a donc $f^{(0)} = f$, $f^{(1)} = f'$ et $f^{(2)} = f''$

On note aussi $\dfrac{d^n f}{dx^n} = f^{(n)}$

Si $p \in [\![0, n]\!]$ :

$$f^{(n)} = \frac{d^p}{dx^p}\left(\frac{d^{n-p} f}{dx^{n-p}}\right) = \frac{d^{n-p}}{dx^{n-p}}\left(\frac{d^p f}{dx^p}\right)$$

En particulier :

$$f^{(n+1)} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^n f}{dx^n}\right) = \frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{df}{dx}\right)$$

Ces dernières formules permettent d'effectuer des preuves par récurrence.

✎ ***Exemple.*** Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $x \longmapsto \cos(x)$ est $n$ fois dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$.

## 4.2 Fonctions de classe $C^n$, de classe $C^\infty$

**Définition 27 – Fonctions de classe $C^n$**

On dit que $f$ est *de classe* $C^n$ sur $A$ lorsque :

(i) $f$ est $n$ fois dérivable sur $A$ ;

(ii) $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $f^{(k)}$ est continue sur $A$.

Donc : $f$ est de classe $C^0$ sur $A \iff f$ est continue sur $A$

Et : $f$ est de classe $C^1$ sur $A \iff f$ est dérivable sur $A$ et $f'$ est continue sur $A$.

Dans ce dernier cas, on dit aussi que $f$ est *continûment dérivable* sur $A$.

✎ ***Exemple.*** La fonction $f : x \longmapsto \begin{cases} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$.

**Notations :** On note $D^n(A, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions $n$ fois dérivables sur $A$, et $C^n(A, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe $C^n$ sur $A$. Alors :

$$C^0(A,\mathbb{R}) \supsetneq D^1(A,\mathbb{R}) \supsetneq C^1(A,\mathbb{R}) \supsetneq \cdots \supsetneq D^n(A,\mathbb{R}) \supsetneq C^n(A,\mathbb{R}) \supsetneq \ldots$$

Si $f \in C^n(A, \mathbb{R})$, alors pour tout $p \in [\![0, n]\!]$ : $f^{(p)} \in C^{n-p}(A, \mathbb{R})$

**Proposition 28 – Caractérisation des fonctions de classe $C^n$**

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $A$ une partie de $\mathbb{R}$. Alors :
$f$ est classe $C^n$ sur $A \iff f$ est $n$ dérivable sur $A$ et $f^{(n)}$ est continue sur $A$.

**Définition 29 – Fonctions de classe $C^\infty$**

On dit que $f$ est *de classe* $C^\infty$ sur $A$ lorsque, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f$ est $C^n$ sur $A$.

On dit aussi que $f$ est *indéfiniment dérivable* sur $A$.

**Notation :** On note $C^\infty(A,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe $C^\infty$ sur $A$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $C^\infty(A,\mathbb{R}) \subsetneq C^n(A,\mathbb{R})$.

Si $f \in C^\infty(A,\mathbb{R})$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $f^{(n)} \in C^\infty(A,\mathbb{R})$

## 4.3 Opérations sur les fonctions de classe $C^n/C^\infty$

Dans cette section, $n$ est un entier naturel.

**Théorème 30 – Combinaison linéaire de fonctions de classe $C^n$**

Soient $f$ et $g$ deux fonctions de classe $C^n$ sur une même partie $A$.
Pour tout $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$, la fonction $\lambda.f + \mu.g$ est de classe $C^n$ sur $A$ et on a :

$$(\lambda.f + \mu.g)^{(n)} = \lambda.f^{(n)} + \mu.g^{(n)}$$

Si $f$ et $g$ sont de classe $C^\infty$ sur $A$, alors la fonction $\lambda.f + \mu.g$ est de classe $C^\infty$ sur $A$.

**Théorème 31 – Théorème de Leibnitz**

Soient $f$ et $g$ deux fonctions de classe $C^n$ sur une même partie $A$.
Alors $f \times g$ est $C^n$ sur $A$ et :

$$\forall x \in A, \quad (f \times g)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.f^{(k)}(x) \times g^{(n-k)}(x)$$

Si $f$ et $g$ sont de classe $C^\infty$ sur une partie $A$, alors $f \times g$ est de classe $C^\infty$ sur $A$.

✎ ***Exemple.*** Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $L_n(x) = \mathrm{e}^x \times \dfrac{d^n}{dx^n}\left(\mathrm{e}^{-x}x^n\right)$ (polynômes de Laguerre). Montrer que $L_n \in \mathbb{R}[X]$ et que son terme dominant est $(-1)^n X^n$.

**Théorème 32 – Composition de fonctions de classe $C^n$**

Soient $f$ une fonction de classe $C^n$ sur une partie $A$, et $g$ une fonction de classe $C^n$ sur une partie $B$ telle que $f(A) \subseteq B$.
Alors $g \circ f$ est $C^n$ sur $A$.

Si $f$ est de classe $C^\infty$ sur $A$, et $g$ est de classe $C^\infty$ sur $B$, alors $g \circ f$ est de classe $C^\infty$ sur $A$.

**Corollaire 33 – Quotient de fonctions de classe $C^n$**

Soient $f$ et $g$ deux fonctions de classe $C^n$ sur une même partie $A$, telle que $g$ ne s'annule pas sur $A$.
Alors $\dfrac{f}{g}$ est $C^n$ sur $A$.

Si $f$ et $g$ sont de classe $C^\infty$ sur $A$, et si $g$ ne s'annule pas sur $A$, alors $\dfrac{f}{g}$ est de classe $C^\infty$ sur $A$.

**Définition 34 – Difféomorphisme**

Soient $f$ une fonction définie sur un intervalle $I$ et $n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$. On note $J = f(I)$. On dit que $f$ est un $C^n$-*difféomorphisme* lorsque :

(i) $f$ est bijective de $I$ sur $J$ ;

(ii) $f$ est de classe $C^n$ sur $I$ ;

(iii) $f^{-1}$ est de classe $C^n$ sur $J$.

On remarque que si $f$ est un $C^n$-difféomorphisme de $I$ sur $J$ alors $f^{-1}$ est aussi un $C^n$-difféomorphisme mais de $J$ sur $I$.

**Théorème 35 – CNS de difféomorphisme**

Soient $f$ une fonction de classe $C^n$ sur un intervalle $I$, avec $n \in \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$. On note $J = f(I)$.
Alors :

$$f' \text{ ne s'annule pas sur } I \iff f \text{ est un } C^n\text{-difféomorphisme de } I \text{ sur J}$$

✎ ***Exemple.*** tan est un $C^\infty$-difféomorphisme de $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$.

⚠ Ce résultat ne s'applique pas si $n = 0$.

## 4.4 Classe de régularité des fonction usuelles

• Les fonctions polynômes sont $C^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

• Les fractions rationnelles ( = quotient de polynômes) sont $C^\infty$ sur leur ensemble de définition.

• Les fonctions cos et sin sont $C^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos^{(k)}(x) = \cos\left(x + k\frac{\pi}{2}\right) \quad \text{et} \quad \sin^{(k)}(x) = \sin\left(x + k\frac{\pi}{2}\right)$$

• Les fonctions arccos et arcsin sont $C^\infty$ sur $]-1, 1[$.

La fonction tan est $C^\infty$ sur $\mathscr{D}_{\tan} = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi \middle/ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

• arctan est $C^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

- La fonction ln est $C^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall x > -1, \quad \big(\ln(1+x)\big)^{(k)} = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}$$

- La fonction exp est $C^\infty$ sur $\mathbb{R}$ (vrai en base quelconque) et on a :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad \big(\mathrm{e}^x\big)^{(k)} = \mathrm{e}^x$$

- Les fonctions ch et sh sont $C^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
- La fonction $x \longmapsto |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$, mais $C^\infty$ seulement sur $\mathbb{R}^*$.
- Les fonctions $x \longmapsto x^\alpha$, où $\alpha \in \mathbb{R}$, sont $C^\infty$ au moins sur $\mathbb{R}_+^*$.

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction $x \longmapsto (1+x)^\alpha$ est donc $C^\infty$ sur $]-1,+\infty[$ (au moins), et on a :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x > -1, \quad \big((1+x)^\alpha\big)^{(k)} = \alpha \times (\alpha-1) \times (\alpha-2) \times \cdots \times (\alpha-k+2) \times (\alpha-k+1) \times (1+x)^{\alpha-k}$$

✎ ***Exemple.*** Simplifier la formule dans le cas $\alpha = \dfrac{1}{2}$.

⚠ Parfois on note $\dfrac{\alpha \times (\alpha-1) \times (\alpha-2) \times \cdots \times (\alpha-k+2) \times (\alpha-k+1)}{k!} = \dbinom{\alpha}{k}$. Mais attention $\alpha!$ n'est pas défini si $\alpha \notin \mathbb{N}$.

## 4.5 Formule de Taylor-Young

Cette formule donne un développement limité.

**Théorème 36 – Formule de Taylor-Young**

Soient $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$ et et $f$ une fonction de classe $C^n$ sur un voisinage de $a$. Alors :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o_{x\to a}\big((x-a)^n\big)$$

En posant $x = a+h$, on obtient :

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k + o_{h\to 0}\big(h^{n+1}\big)$$

✎ ***Exemple.*** Donner le $DL_3(0)$ de $\tan(x)$ et en déduire son $DL_4(0)$.
Retrouver ce résultat en utilisant une équation différentielle dont tan est solution.

✎ ***Exemple.*** Donner le $DL_3(0)$ de $\arctan(x)$.
Retrouver le résultat en utilisant que $\tan(\arctan(x)) = x$.

✎ ***Exemple.*** Si $f$ est $C^2$ au voisinage de $a$, alors : $f''(a) = \lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \dfrac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2}$.

**Corollaire 37 – Existence de développement limité à tout ordre**

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f$ une fonction de classe $C^\infty$ sur un voisinage de $a$.
Alors $f$ admet en $a$ un développement limité à tout ordre.

⚠ Si $f$ a un $DL_n(a)$ alors $f$ peut ne pas être $n$ fois dérivable en $a$ (sauf si $n = 1$).

✎ ***Exemple.*** Si $f(x) = x^3 \sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ alors $f(x) = o_{x\to 0}(x^2)$ mais $f$ n'est pas deux fois dérivable en 0.

## 4.6 Brève extension aux fonctions à valeurs complexes

$I$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f$ est une fonction définie sur $I$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$.

**Définition 38 – Dérivabilité en un point $a$**

On dit que $f$ est dérivable en $a \in I$ lorsque $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et est finie.

On peut définir de même les notions de dérivabilité à droite ou à gauche.

**Définition 39 – Dérivabilité sur un intervalle**

On dit que $f$ est dérivable sur l'intervalle $I$ lorsque $f$ est dérivable en tout point $a \in I$.

On définit alors la fonction dérivée $f' : I \longrightarrow \mathbb{C}$.

**Théorème 40 – Lien avec les parties réelles et imaginaires**

On a équivalence de :

(i) $f$ est dérivable sur $I$ ;

(ii) $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont dérivables sur $I$.

Dans ce cas :

$$f' = \mathrm{Re}(f)' + i\,\mathrm{Im}(f)'$$

On en déduit que $\mathrm{Re}(f)' = \mathrm{Re}(f')$ et $\mathrm{Im}(f)' = \mathrm{Im}(f')$.

✎ ***Exemple.*** Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, la fonction $t \longmapsto e^{\lambda t}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\left(e^{\lambda t}\right)' = \lambda e^{\lambda t}$.

Dans le théorème suivant on se donne une autre fonction $g$ définie sur l'intervalle $I$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$.

**Théorème 41 – Opérations sur les fonctions dérivables**

Si $f$ et $g$ sont dérivables sur $I$ alors les fonctions $\lambda f$, $f+g$, $f\times g$ et $\overline{f}$ sont aussi dérivables sur $I$.
Si $f$ ne s'annule pas, alors $|f|$ est dérivable sur $I$.
Si $g$ ne s'annule pas, alors $\dfrac{f}{g}$ est dérivable sur $I$.

Le théorème suivant se généralise pour les fonctions à valeurs complexes.

**Théorème 42 – Inégalité des accroissements finis**

Si $f$ est dérivable sur $I$ et si il existe $M>0$ tel que $\forall x\in I,\ \left|f'(x)\right|\leq M$ alors :

$$\forall x\in I,\quad \left|f(x)-f(y)\right|\leq M\times|x-y|$$

On dit que la fonction $f$ est $M$-lipschitzienne.

✎ ***Exemple.*** Montrer que : $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $\left|e^{ix}-e^{iy}\right|\leq|x-y|$.

⚠ Le théorème de Rolle n'est plus valable : la fonction $t\longmapsto e^{it}$ prend la valeur 1 en 0 et $2\pi$, mais sa dérivée ne s'annule jamais.

## 5 Compétences à acquérir sur ce chapitre

- ➥ Connaître la notion de dérivabilité, en un point de l'ensemble de continuité.
  - ✪ L'utiliser pour calculer une limite (taux d'accroissement).
  - ✪ Vérifier que $f$ est dérivable en $a$ en calculant $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$.
  - ✪ Vérifier que $f$ est dérivable en $a$ en montrant qu'elle est dérivable à gauche et à droite, et que $f'_g(a) = f'_d(a)$.
  - ✪ Utiliser le théorème de la limite de la dérivée (ou petite règle de l'Hospital).

- ➥ Savoir montrer qu'une fonction est dérivable sur un intervalle.
  - ✪ Utiliser les théorèmes généraux sur les fonctions dérivables.
  - ✪ Pour un quotient de fonctions continues ne pas oublier que le dénominateur de doit pas s'annuler.
  - ✪ Pour une composée de fonctions continues ne pas oublier que les intervalles doivent bien « s'emboîter ».
  - ✪ Pour une bijection réciproque $f^{-1}$ sur un intervalle $J$, il suffit que la dérivée $f'$ ne s'annule par sur l'intervalle $I = f^{-1}(J)$.

- ➥ Savoir montrer qu'une fonction est de classe $C^n$ ou $C^\infty$ sur un intervalle.
  - ✪ Utiliser les théorèmes généraux sur les fonctions de classe $C^n$ ou $C^\infty$.
  - ✪ Procéder par récurrence en conjecturant l'expression de $f^{(n)}$ pour montrer que $f$ est de classe $C^\infty$.
  - ✪ Pour un produit utiliser le théorème de Leibnitz.

- ➥ Connaître les deux théorèmes fondamentaux sur les fonctions dérivables.
  - ✪ Le théorème de Rolle qui permet de montrer que la dérivée d'une fonction s'annule au moins une fois.
  - ✪ Le théorème des accroissements finis qui donne des encadrements sur $f$ à partir d'encadrements sur $f'$.

- ➥ Connaître la formule de Taylor-Young.

# 6 Exercices

**Dérivée et étude de fonctions**

**EXERCICE 1. Propriété d'une dérivée**

Soit $f$ une fonction dérivable sur un intervalle $I$.

1. Établir que $f$ et $f'$ sont de parités contraires.
2. Montrer que $f'$ est de même périodicité que $f$.

**EXERCICE 2. Études de fonctions**

1. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $2+\ln x = \dfrac{x^4}{4}$.
2. On note $h$ l'application de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ définie par $h(0)=0$ et pour tout $x>0$, $h(x) = x\ln(x)$. Montrer que $h$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et tracer l'allure de son graphe en précisant les tangentes au point d'abscisse 0 et 1.
3. On pose $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$. Montrer que $f$ est bijective sur $\mathbb{R}$ et déterminer $f^{-1}$.

**EXERCICE 3. Dérivabilité d'une fonction**

Pour chacune des fonctions suivantes déterminer son ensemble de continuité (la prolonger éventuellement par continuité aux bornes de son ensemble de définition), son ensemble de dérivabilité, puis calculer sa dérivée. Sont-elles de classe $C^1$ là où elles sont dérivables ?

1. $x \longmapsto \arctan \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ 2. $x \longmapsto \begin{cases} 1-\mathrm{e}^x & \text{si } x<0 \\ -\ln(1+x) & \text{si } x>0 \end{cases}$ 3. $x \longmapsto \sqrt{|1-x^2|}$

**EXERCICE 4. Fonctions circulaires réciproques**

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ :

$$\arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = \begin{cases} -2\arctan(x)-\pi & \text{si } x<-1 \\ 2\arctan(x) & \text{si } -1\leq x\leq 1 \\ -2\arctan(x)+\pi & \text{si } x>1 \end{cases}$$

**EXERCICE 5. Recollement de solutions pour une équation différentielle**

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

1. $xy'-y=x$ 2. $xy'+y=1$
3. $xy'-2y=x^4$ 4. $x(1+x^2)y'-(x^2-1)y=-2x$

**Théorèmes de Rolle et des accroissements finis**

**EXERCICE 6. Un critère de monotonie**

Soit $f$ une fonction continue sur $\mathbb{R}^+$, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, telle que $f(0)=0$ et $f'$ croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Établir que :

$$\forall x>0,\quad \frac{f(x)}{x}\leq f'(x).$$

En déduire que la fonction $g: x\longmapsto \frac{f(x)}{x}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

**EXERCICE 7. Approximation de** e

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $u_n=1+\dfrac{1}{1!}+\cdots+\dfrac{1}{n!}=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$ et on définit $f_n:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$ par $f_n(x)=\mathrm{e}^{-x}\left(1+\dfrac{x}{1!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}\right)$.
En appliquant l'inégalité des accroissements finis à la fonction $f_n$ sur $[0,1]$, montrer que $u_n\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}$ e.

**EXERCICE 8. Équivalents de sommes**

1. (a) Montrer que :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad \frac{1}{n+1}\leq \ln(n+1)-\ln(n)\leq\frac{1}{n}$$

   (b) En déduire un équivalent de la suite $(H_n)_{n\geq1}$ définie par : $H_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.

2. Soit $\alpha\in]0,1[$.

   (a) Établir que :

$$\forall n\geq1,\quad \frac{1-\alpha}{(n+1)^{\alpha}}\leq (n+1)^{1-\alpha}-n^{1-\alpha}\leq\frac{1-\alpha}{n^{\alpha}}.$$

   (b) En déduire un équivalent de la suite $(H_n)_{n\geq1}$ définie par : $H_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{\alpha}}$

**EXERCICE 9. Étude de suites récurrentes**

1. On considère la fonction $f:\mathbb{R}_+^*\longrightarrow\mathbb{R}$ définie par $f(x)=4-\dfrac{1}{4}\ln(x)$.

   (a) Montrer que l'équation $f(x)=x$ a une unique solution $\alpha$ sur $\mathbb{R}_+^*$ puis que $\alpha\in]3,4[$.

   (b) Montrer que $]3,4[$ est $f$-stable et que $\forall x\in]3,4[$, $|f'(x)|\leq\dfrac{1}{12}$.

   (c) Soit $(x_n)$ la suite définie par $x_0\in]3,4[$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $x_{n+1}=f(x_n)$.
   Montrer que $(x_n)$ converge vers $\alpha$ et trouver une appoximation de $\alpha$ à $10^{-5}$ près.

2. On considère la fonction $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 2 + \dfrac{1}{x^2}$.
   (a) Montrer que l'équation $f(x) = x$ a une unique solution $\beta$ sur $\mathbb{R}_+^*$ puis que $\beta \in \left]2, \dfrac{9}{4}\right[$.
   (b) Montrer que $\left]2, \dfrac{9}{4}\right[$ est $f$-stable et que $\forall x \in \left]2, \dfrac{9}{4}\right[$, $|f'(x)| \leq \dfrac{1}{4}$.
   (c) Soit $(u_n)$ la suite définie par $u_0 \neq 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
   Montrer que $\forall n \geq 1$, $u_n > 2$ puis que $\forall n \geq 2$, $2 < u_n < \dfrac{9}{4}$.
   En étudiant les sous-suites $(u_{2n})$ et $(u_{2n+1})$, montrer que $(u_n)$ converge vers $\beta$ et trouver une appoximation de $\beta$ à $10^{-9}$ près.

**EXERCICE 10. Règle de l'Hospital**

1. Soient $f$ et $g$ deux fonctions définies et continues sur $[a, b[$, dérivables sur $]a, b[$, et telles que $g'$ ne s'annule pas sur $]a, b[$.
   Si $\displaystyle\lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe alors montrer que $\displaystyle\lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.
   *Indication : pour $x > a$, appliquer le théorème de Rolle entre $a$ et $x$ à la fonction $t \longmapsto \big(f(t) - f(a)\big)\big(g(x) - g(a)\big) - \big(g(t) - g(a)\big)\big(f(x) - f(a)\big)$.*
2. Calculer $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{\cos(2x) - 1}{x^3 + 5x^2}$ avec la règle de l'Hospital.
3. En considérant les fonction $f$ et $g$ définies par $f(x) = x^4$ et $g(x) = x^5 \mathrm{e}^{-i/x^2}$, vérifier que la règle ne s'applique pas pour des fonctions à valeurs complexes.

## Dérivées d'ordres supérieurs

**EXERCICE 11. Théorème de Rolle en cascade**

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $f$ une fonction $n$ fois dérivable sur $[a, b]$, s'annulant en $n + 1$ points distincts de $[a, b]$. Montrer que $f^{(n)}$ s'annule au moins une fois sur $]a, b[$.
2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a, b$ deux réels tels que $a < b$. On considère $f$ une fonction de classe $C^n$ sur $[a, b]$ telle que :
   $$\forall k \in [\![0, n-1]\!], \quad f^{(k)}(a) = f^{(k)}(b) = 0.$$
   Montrer que $f^{(n)}$ s'annule au moins $n$ fois sur $]a, b[$.
   Application : pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $P_n = (X+1)^n (X-1)^n$ et $L_n = P_n^{(n)}$ (polynômes de Legendre). Montrer que $L_n$ admet $n$ racines réelles disctinctes et qu'elles appartiennent à l'intervalle $]-1, 1[$.

**EXERCICE 12. Calculs de dérivées successives**

Montrer que les fonctions suivantes sont de classe $C^\infty$ sur leur ensemble de définition et déterminer leurs dérivées successives : $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$, $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ et $x \mapsto \dfrac{1}{1-x^2}$.

**EXERCICE 13. Prolongement $C^\infty$**

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} \text{ si } x > 0. \end{cases}$

1. Montrer que $f$ est de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et qu'il existe une suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x > 0, \quad f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}}.$$
2. En déduire que $f$ est $C^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

## Sujets d'étude

**EXERCICE 14. Croissance polynômiale**

Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $C^2$ telle que $f(a) = f(b) = 0$.

1. Montrer que :
$$\forall x \in [a,b], \quad \exists c \in ]a,b[;\ f(x) = \frac{(x-a)(x-b)}{2}f''(c)$$
*Indication : on considèrera la fonction $\varphi(t) = f(t) - \frac{A}{2}(t-a)(t-b)$ où $A$ est une constante bien choisie.*
2. En déduire une constante $M$ telle que :
$$\forall x \in [a,b], \quad |f(x)| \leq M\frac{(x-a)(b-x)}{2}$$

**EXERCICE 15. Suites implicites**

On pose : $\forall t > 0$, $g(t) = \frac{1}{t}\mathrm{e}^{-\frac{1}{t}}$.

1. Montrer que $g$ peut-être prolongée en 0 en une fonction dérivable à droite en 0.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que pour $n$ assez grand, l'équation $(E_n)$ : $g(t) = \frac{1}{n}$ admet deux solutions $x_n$ et $y_n$ sur $\mathbb{R}_+$ vérifiant : $0 < x_n < 1 < y_n$.
3. Donner la monotonie et la limite des suites $(x_n)$ et $(y_n)$.

**EXERCICE 16. Suite récurrente**

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{x-1} \times \dfrac{\ln(x)}{2} & \text{si } x \neq 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

1. Montrer que $f$ est $C^1$ sur son ensemble de définition.
2. Montrer que $\forall x > 0$, $\ln(x) \leqslant x - 1$ avec égalité si et seulement si $x = 1$.
Construire le tableau de variations de $f$ et montrer que : $\forall x > 1$, $f(x) < x$.

3. Soit $a > 1$. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_0 = a$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = f(x_n)$ est bien définie et à valeurs dans $]1,+\infty[$. Établir qu'elle converge et déterminer sa limite $\ell$.
4. Montrer qu'il existe un entier $n_0$ tel que :
$$\forall n \geqslant n_0, \quad |x_{n+1} - \ell| \leqslant \frac{1}{3}|x_n - \ell|$$
En déduire que :
$$\forall n \geqslant n_0, \quad |x_n - \ell| \leqslant \frac{1}{3^{n-n_0}}|x_{n_0} - \ell|$$
5. En déduire que : $x_n \underset{n\to+\infty}{=} \ell + o\left(\frac{1}{2^n}\right)$.

**EXERCICE 17. Dérivabilité d'une bijection réciproque**

On définit les deux fonctions $\varphi : [0,2\pi] \longrightarrow [0,2\pi]$ et $\psi : [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ par , $\varphi(t) = t - \sin(t)$ et $\psi(t) = 1 - \cos(t)$.

1. Montrer que $\varphi$ est $C^1$ sur $[0,2\pi]$ et qu'elle admet une fonction réciproque $\varphi^{-1}$ qui est continue sur $[0,2\pi]$ et dérivable sur $]0,2\pi[$.

On définit $f : [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ par $f(t) = \psi \circ \varphi^{-1}(t)$.

2. Vérifier que $f$ est continue sur $[0,2\pi]$ et dérivable sur $]0,2\pi[$.
3. Étudier les variations de $f$ sur $[0,2\pi]$.
Montrer que la droite d'équation $t = \pi$ est axe de symétrie pour la courbe représentative de $f$.
Déterminer $\lim\limits_{t\to 0^+} f'(t)$. Que peut-on en déduire?
4. Tracer l'allure de la courbe représentative de $f$.

**EXERCICE 18. Fonction implicite**

Soit $a$ un réel positif ou nul. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $P_a(x) = x^3 + ax - 1$.

1. Montrer que ce polynôme admet une unique racine réelle $u(a)$.
On note $u$ l'application définie sur $\mathbb{R}_+$ qui a tout $a$ associe le réel $u(a)$.
2. Montrer que : $u(\mathbb{R}_+) \subseteq \mathbb{R}_+^*$.
3. Montrer que $u$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$.
4. Calculer $u(0)$, puis $\lim\limits_{a\to+\infty} u(a)$.
5. Déterminer l'application réciproque de $u$.
6. Montrer que $u$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.
7. Montrer que $u$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et calculer $u'(a)$, pour tout $a \in \mathbb{R}_+$.
8. Esquisser l'allure de la courbe représentative de $u$.