<u>dem th 19</u> On suppose les évènements $(A_1, \dots, A_n)$ mutuellement indépendants.

On se donne $(i;j) \in [\![1,n]\!]^2$ tq $i \neq j$.

<u>but</u> A_i et A_j indépendants ie $\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A_i) \times \mathbb{P}(A_j)$

On utilise la propriété d'indépendance mutuelle avec la partie $J = \{i; j\} \subset [\![1,n]\!]$:

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k \in \{i;j\}} A_k\right) = \prod_{k \in \{i;j\}} \mathbb{P}(A_k)$$

ie $\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A_i) \times \mathbb{P}(A_j)$.

Exemple 1 Contre-exemple où les 3 évènements A, B, C sont 2 à 2 indépendants mais pas mutuellement indépendants.

On lance 2 dés : un noir et un blanc.

A = "le chiffre du dé noir est pair"

B = "le chiffre du dé blanc est impair"

C = "les 2 chiffres ont la même parité"

* A et B sont évidemment indépendants mais démontrons le quand même.

Ici $\Omega = [\![1, 6]\!]^2$. Les dés sont non truqués donc $\mathbb{P}$ est la probabilité uniforme.

$|\Omega| = 36$.

$\mathbb{P}(A) = \frac{3 \times 6}{36} = \frac{1}{2}$ $\mathbb{P}(B) = \frac{3 \times 6}{36} = \frac{1}{2}$

$\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{3 \times 3}{36} = \frac{1}{4}$.

On a bien $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B) = \frac{1}{4}$

Donc $A \perp\!\!\!\perp B$.

* $\mathbb{P}(C) = \frac{3 \times 3 + 3 \times 3}{36} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$

$A \cap C$ = "les 2 dés donnent un chiffre pair"

$$\mathbb{P}(A \cap C) = \frac{3 \times 3}{36} = \frac{1}{4}$$

On a donc $\mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(C)$ donc $A \perp\!\!\!\perp C$.

* $B \cap C =$ "les 2 dés donnent un chiffre impair"

donc $\mathbb{P}(B \cap C) = \frac{3 \times 3}{36} = \frac{1}{4}$

donc $\mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}(C)$ donc $B \perp\!\!\!\perp C$.

⚠ A ce stade on a montré que les évènements (A, B, C) sont <u>2 à 2 indépendants</u>.

* $A \cap B \cap C = \emptyset$

donc $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = 0 \neq \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}(C)$

⚠ Les évènements (A, B, C) <u>ne sont pas mutuellement indépendants</u>.

Peut-on avoir A indépendant de lui-même ?

A indépendant de A signifie que $\mathbb{P}(A \cap A) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(A)$

Comme $A \cap A = A$ on a donc :

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A)^2$$

donc $\mathbb{P}(A) = 0$ ou 1

Donc A est un évènement impossible ou certain.