Exemple 1 • On lance 2 fois une pièce.

Les évènements $P_1 =$ "le 1er lancer donne pile"
$P_2 =$ "le 2nd lancer donne pile"

sont indépendants.

Donc si on note p la probabilité que la pièce donne "pile", $p \in]0,1[$ alors :

$$\mathbb{P}(\text{"obtenir 2 piles"}) = \mathbb{P}(P_1 \cap P_2) \overset{\text{car } P_1 \perp P_2}{=} \mathbb{P}(P_1) \times \mathbb{P}(P_2)$$
$$= p \times p = p^2$$

• On dispose d'une urne avec 4 boules noires et 6 boules blanches. On en pioche 2 une par une avec remise.

Les évènements $N_1 =$ "obtenir une boule noire au 1er tirage"
$B_2 =$ "- - - - - blanche au 2nd tirage".

sont indépendants.

Donc :

$$\mathbb{P}(\text{"obtenir une noire puis une blanche"})$$
$$= \mathbb{P}(N_1 \cap B_2) \underset{N_1 \perp B_2}{=} \mathbb{P}(N_1) \times \mathbb{P}(B_2) = \frac{4}{10} \times \frac{6}{10} = \frac{6}{25}$$

Rem: on savait résoudre cet exercice par dénombrement avec le modèle de l'urne bicolore : $\mathbb{P}(N_1 \cap B_2) = \frac{4^1 \times 6^1}{10^2}$

⚠ Le dénombrement ne peut pas s'utiliser pour l'exercice précédent de la pièce truquée.

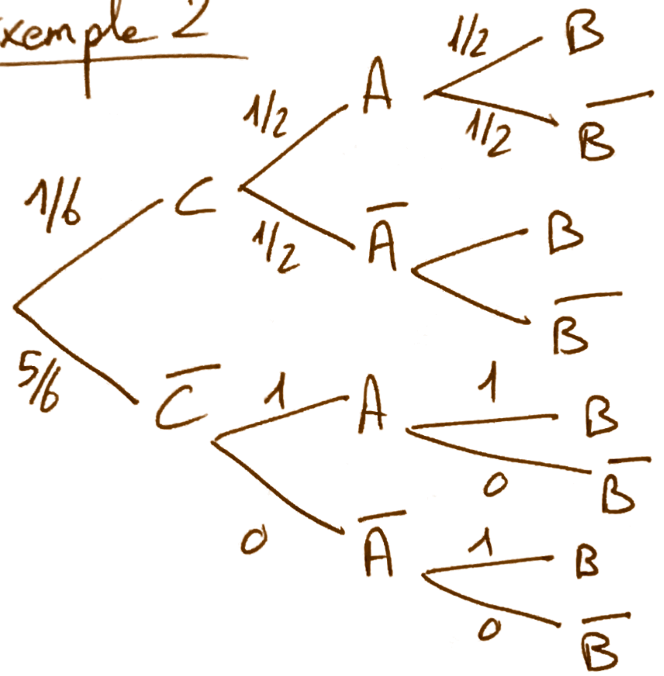
dem prop 15

$$A \perp\!\!\!\perp B \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$$

$$\underset{\mathbb{P}(B)\neq 0}{\Longleftrightarrow} \mathbb{P}(A) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

$$\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}_B(A)$$

Exemple 2



Comme les deux lancers de pièce sont faits "de manières indépendantes", une fois qu'on a choisi quelle pièce on lance, les résultats sont indépendants.

Mathématiquement cela signifie que :

$$\mathbb{P}_C(A \cap B) = \mathbb{P}_C(A) \times \mathbb{P}_C(B).$$

Vérifions par un calcul que A et B ne sont pas indépendants, ie que $\mathbb{P}(A \cap B) \neq \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$

Comme $(C, \overline{C})$ est un sce la formule des probabilités totales donne :

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(C) \times \mathbb{P}_C(A) + \mathbb{P}(\overline{C}) \times \mathbb{P}_{\overline{C}}(A) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} + \frac{5}{6} \times 1 = \frac{11}{12}$$

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C) \times \mathbb{P}_C(B) + \mathbb{P}(\overline{C}) \times \mathbb{P}_{\overline{C}}(B) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} + \frac{5}{6} \times 1 = \frac{11}{12}$$

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(C) \times \mathbb{P}_C(A \cap B) + \mathbb{P}(\overline{C}) \times \mathbb{P}_{\overline{C}}(A \cap B)$$

Comme A et B sont indépendants pour $\mathbb{P}_C$ et $\mathbb{P}_{\overline{C}}$:

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(C) \times \mathbb{P}_C(A) \times \mathbb{P}_C(B) + \mathbb{P}(\overline{C}) \times \mathbb{P}_{\overline{C}}(A) \times \mathbb{P}_{\overline{C}}(B)$$

$$= \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{5}{6} \times 1 \times 1 = \frac{21}{24}$$

Donc $\mathbb{P}(A \cap B) \neq \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$.

A et B ne sont pas indépendants (on ne précise pas avec quelle pièce on va jouer, cela dépend du résultat du lancer du 1er dé).

dem prop 16 On suppose que A et B sont des événements indépendants ie que $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$.

but $\overline{A}$ et B sont indépendants ie $\mathbb{P}(\overline{A} \cap B) = \mathbb{P}(\overline{A}) \times \mathbb{P}(B)$

Comme $(A, \overline{A})$ est un sce, la formule des probabilités totales donne :

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \cap A) + \mathbb{P}(B \cap \overline{A})$$

donc $\mathbb{P}(\overline{A} \cap B) = \mathbb{P}(B \cap \overline{A}) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(B \cap A)$.

Comme $A \perp\!\!\!\perp B$:
$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\overline{A} \cap B) &= \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}(A) \\ &= (1 - \mathbb{P}(A)) \times \mathbb{P}(B) \\ &= \mathbb{P}(\overline{A}) \times \mathbb{P}(B) \end{aligned}$$

Ce qui prouve que $\overline{A}$ et B sont indépendants.

De même A et $\overline{B}$ sont indépendants.

En réappliquant la même propriété : $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.

<u>Exercice bonus</u> On tire une carte dans un jeu de 32 cartes.

On note $E =$ " la carte est un cœur "

$F =$ " la carte est un valet "

Les événements E et F sont-ils indépendants ?

Intuitivement ce n'est pas clair.

Nous allons donc répondre à cette question par un calcul.

Premièrement $\mathbb{P}(E) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$ et $\mathbb{P}(F) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$

Ensuite $E \cap F =$ " la carte est le valet de cœur "

donc $\mathbb{P}(E \cap F) = \frac{1}{32}$.

On a $\mathbb{P}(E \cap F) = \mathbb{P}(E) \times \mathbb{P}(F)$.

Donc les événements E et F sont indépendants.