Chapitre 14

Espaces probabilisés finis

Sommaire

1 Vocabulaire et axiomatique des probabilités

1.1 L'univers

Intuitivement, on appelle *expérience aléatoire* une expérience dont le résultat ne peut pas être prédit ou calculé à l'avance.

On désigne par Ω l'ensemble des résultats possibles de cette expérience aléatoire.

Ω est appelé *univers* ou encore *espace des possibles, espace des réalisations* ou *espace des observations.* Les éléments $\omega \in \Omega$ sont appelés *observations* ou *réalisations* de l'expérience aléatoire.

Dans ce chapitre, on se limitera toujours au cas où Ω est un *ensemble fini,* c-est-à-dire qu'on ne considèrera que des expériences aléatoires ne donnant qu'un nombre fini de résultats différents.

✎ ***Exemple.*** On lance un dé à 6 faces : $\Omega = \{1;2;3;4;5;6\} = [\![1,6]\!]$. Un élément $\omega \in \Omega$ est un chiffre entre 1 et 6 qui représente le chiffre obtenu en lançant le dé.

✎ ***Exemple.*** On lance deux dés à 6 faces distinguables : $\Omega = \{1;2;3;4;5;6\} \times \{1;2;3;4;5;6\} = [\![1,6]\!]^2$. Un élément $\omega \in \Omega$ est un couple (ω_1, ω_2) où ω_1 représente le chiffre obtenue avec le premier dé, et ω_2 le chiffre obtenu avec le second.

✎ ***Exemple.*** On lance 1 fois une pièce : $\Omega = \{P,F\}$ ou $\Omega = \{0,1\}$ avec la convention que « 1 » représente « pile », et « 0 » représente « face ».

✎ ***Exemple.*** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On lance n fois une pièce : $\Omega = \{P,F\}^n$ ou $\Omega = \{0,1\}^n$ avec la convention que « 1 » représente « pile », et « 0 » représente « face ».
Un élément $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \Omega$ est un n-uplet qui représente la liste des résultats obtenus aux n lancers. Par exemple pour 6 lancers, on peut avoir $\omega = (P,P,F,P,F,P)$ qui se note aussi $\omega = (1,1,0,1,0,1)$.

Dans les exemples suivants, n et N sont des entiers naturels.

✎ ***Exemple.*** On effectue n tirages successifs *avec remise* d'une boule, dans une urne de N boules : $\Omega = [\![1,N]\!]^n$. Ceci sous-entend qu'on a numéroté les N boules de 1 à N ; un élément $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \Omega$ est un n-uplet qui représente la liste des numéros tirés.

Par exemple $\omega = (6,2,2,6,4,3,5)$ pour 7 tirages avec remise dans une urne de 6 boules.

✎ ***Exemple.*** On effectue n tirages successifs *sans remise* d'une boule, dans une urne de N boules (dans ce cas $n \leq N$) : Ω = ensemble des arrangements de n éléments de $[\![1,N]\!]$ = ensemble des n-uplets $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in [\![1,N]\!]^n$ dont les composantes sont deux à deux distinctes. Encore une fois ceci sous-entend qu'on a numéroté les N boules de 1 à N ; un élément $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \Omega$ est un n-uplet qui représente la liste des numéros tirés.
Par exemple $\omega = (6,2,3)$ pour 3 tirages sans remise dans une urne de 10 boules.

✎ ***Exemple.*** On effectue 1 tirage de n boules prises *simultanément* dans une urne de N boules (dans ce cas $n \leq N$) : Ω = ensemble des combinaisons de n éléments de $[\![1,N]\!]$ = ensemble des parties $\omega = \{\omega_1,\dots,\omega_n\} \subseteq [\![1,N]\!]$. Encore une fois ceci sous-entend qu'on a numéroté les N boules de 1 à N ; un élément $\omega = \{\omega_1,\dots,\omega_n\} \in \Omega$ est une partie qui représente les numéros tirés.

Par exemple $\omega = \{6,2,3\}$ pour 1 tirage de 3 boules prises simultanément dans une urne de 10 boules.

✎ ***Exemple.*** On mélange un jeu de n cartes : $\Omega = \{\omega : [\![1,n]\!] \longrightarrow [\![1,n]\!] ; \omega \text{ bijective}\}$. Ceci sous-entend qu'on a numéroté les cartes de 1 à n en fonction de leur position initiale. Pour la carte numéro i, l'entier $\omega(i)$ représente sa position après la permutation ω.

Par contre, on n'étudiera pas dans ce chapitre le cas d'une infinité de lancers d'une pièce (pourtant très instructif!).

1.2 Évènements

Intuitivement, un évènement A est défini par une phrase qui peut être *vraie* ou *fausse* selon le résultat de l'expérience aléatoire.

✎ ***Exemple.*** On lance un dé à 6 faces : $\Omega = [\![1,6]\!]$.
A = « obtenir un 6 » donne la partie de Ω : $A = \{6\}$
B = « obtenir un nombre pair » donne la partie de Ω : $B = \{2;4;6\}$

✎ ***Exemple.*** On lance deux dés à 6 faces distinguables : $\Omega = [\![1,6]\!]^2$.
A = « obtenir un double 6 » donne la partie de Ω : $A = \{(6,6)\}$
B = « obtenir un double » donne la partie de Ω :
$$\begin{aligned} B &= \{(i,i);\ i \in [\![1,6]\!]\} \\ &= \{(1,1);(2,2);(3,3);(4,4);(5,5);(6,6)\} \end{aligned}$$
C = « obtenir au moins un 6 » donne la partie de Ω :
$$\begin{aligned} C &= \{(i,6);\ i \in [\![1,6]\!]\} \cup \{(6,j);\ j \in [\![1,6]\!]\} \\ &= \{(1,6);(2,6);(3,6);(4,6);(5,6);(6,6);(6,1);(6,2);(6,3);(6,4);(6,5)\} \end{aligned}$$

✎ ***Exemple.*** On mélange un jeu de n cartes : $\Omega = \{\omega : [\![1,n \longrightarrow [\![1,n]\!] \,/\, \omega \text{ bijective}\}$.
A = « la première carte se retrouve dans la première moitié du paquet » donne la partie de Ω :
$$A = \left\{\omega : [\![1,n]\!] \longrightarrow [\![1,n]\!] \text{ bijective} ;\ \omega(1) \leq \left\lfloor \tfrac{n}{2} \right\rfloor \right\}$$
Pour $i \in [\![1,n]\!]$ fixé, B_i = « la carte numéro i n'a pas changé de place » donne la partie de Ω :
$$B_i = \left\{\omega : [\![1,n]\!] \longrightarrow [\![1,n]\!] \text{ bijective} ;\ \omega(i) = i\right\}$$

On voit sur ces exemples qu'un évènement A est nécessairement *une partie de* Ω : $A \in \mathscr{P}(\Omega)$.

Si on note $\mathscr{T}$ l'*ensemble de tous les évènements* qu'on peut associer à l'expérience aléatoire, alors $\mathscr{T} \subseteq \mathscr{P}(\Omega)$.

On admettra que sous l'hypothèse que Ω est fini, l'ensemble des évènements est $\mathscr{T} = \mathscr{P}(\Omega)$, ie que toutes les parties de Ω sont des évènements : on pourra donc calculer leur probabilité. Dans le cas d'un univers infini, certaines parties de Ω ne pourront pas être considérées comme des évènements ; nous ne développerons pas ce point dans ce chapitre.

Vocabulaire :

• On dit que l'*observation* $\omega \in \Omega$ *réalise l'évènement* A lorsque $\omega \in A$: cela signifie que si l'expérience aléatoire a donné le résultat ω, alors l'évènement A est « vrai ». Inversement, si $\omega \notin A$, on dit que l'observation ω *ne réalise pas* A.
• L'évènement $\emptyset$ est appelé *évènement impossible*.
• L'évènement Ω est appelé *évènement certain*.

Il est clair qu'aucune observation ne réalise l'évènement impossible $\emptyset$, et que toutes les observations réalisent l'évènement certain Ω.

Définition 1 – Évènements élémentaires

On appelle *évènements élémentaires* les singletons de Ω, ie les évènements de la forme $\{\omega\}$ avec $\omega \in \Omega$.

Une remarque importante : tout évènement A est réunion d'évènements élémentaires. En effet, on a :

$$A = \bigcup_{\omega \in A} \{\omega\}$$

1.3 Opérations sur les évènements

Soient A et B deux évènements, c'est-à-dire $(A, B) \in \mathscr{P}(\Omega)^2$. On dispose des opérations suivantes.

Nom	Notation	Interprétation
Contraire	$\complement_\Omega A = \overline{A}$	A n'est pas réalisé
Union	$A \cup B$	A est réalisé **ou** B est réalisé
Intersection	$A \cap B$	A est réalisé **et** B est réalisé
Différence	$A \setminus B = A - B = A \cap \overline{B}$	A est réalisé mais B ne l'est pas
Inclusion	$A \subseteq B$	A est réalisé $\Longrightarrow$ B est réalisé

On peut remarquer que la différence symétrique $A \Delta B$ permet de définir un « ou » exclusif, mais ce n'est pas au programme.

Rappels. Si A, B et C sont des évènements :

$$\begin{array}{ll}
A \setminus B \subseteq A & A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B \\
A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) & A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \\
A \cup B = B \cup A & A \cap B = B \cap A \\
A \cup \emptyset = A & A \cap \emptyset = \emptyset \\
A \cup \Omega = \Omega & A \cap \Omega = A \\
\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} & \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}
\end{array}$$

On généralise à $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'évènements :

$$\overline{\bigcup_{i\in I} A_i} = \bigcap_{i\in I} \overline{A_i} \qquad \overline{\bigcap_{i\in I} A_i} = \bigcup_{i\in I} \overline{A_i}$$

$$B \cap \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} (B \cap A_i) \qquad B \cup \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I} (B \cup A_i)$$

L'évènement $\bigcup_{i\in I} A_i$ correspond à l'évènement « au moins un des A_i est réalisé ».
L'évènement $\bigcap_{i\in I} A_i$ correspond à l'évènement « tous les A_i sont réalisés ».
L'évènement $\bigcap_{i\in I} \overline{A_i}$ correspond à l'évènement « aucun des A_i n'est réalisé ».

Définition 2 – Évènements incompatibles

Deux évènements A et B sont dits *incompatibles* lorsqu'ils sont disjoints : $A \cap B = \emptyset$.

Intuitivement, A et B sont incompatibles lorsqu'ils ne peuvent pas se produire simultanément.

✎ ***Exemple.*** Lorsqu'on lance un dé à 6 faces : les évènements A = « obtenir un chiffre pair » et B = « obtenir un chiffre impair » sont incompatibles.

1.4 Système complet d'évènements

Soit $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ une famille d'évènements de Ω, c'est-à-dire un n-uplet de parties de Ω.

Définition 3 – Système complet d'évènements

On dit que la famille $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ est un *système complet d'évènements* (s.c.e.) lorsque :

(i) les A_i, $i \in [\![1, n]\!]$, sont deux à deux incompatibles :

$$\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2, \quad i \neq j \Longrightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$$

(ii) $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$

Dans le cas où tous les A_i, pour $i \in [\![1, n]\!]$, sont non vides, un système complet d'évènements est une partition de Ω.

Intuitivement, un s.c.e. correspond à une disjonction des cas, suivant le résultat de l'expérience aléatoire.

✎ ***Exemple.*** On lance deux dés à 6 faces. On définit les évènements A = « obtenir deux chiffres pairs », B = « obtenir deux chiffres impairs » et C = « obtenir un chiffre pair et un chiffre impair ». Alors (A, B, C) est un s.c.e..

✎ ***Exemple.*** Si $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ (expérience avec n résultats possibles) alors la famille $\big(\{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \dots, \{\omega_n\}\big)$ est un s.c.e.. Par exemple si on lance un dé à 6 faces alors la famille $\big(\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}\big)$ est un s.c.e. de l'univers $[\![1,6]\!]$.

✎ ***Exemple.*** Si $A \in \mathscr{P}(\Omega)$, alors $\left(A, \overline{A}\right)$ est un s.c.e..

2 Probabilité sur un univers fini

2.1 Probabilité

Définition 4 – Probabilité

On appelle *probabilité* sur l'univers fini Ω toute application $\mathbb{P} : \mathscr{P}(\Omega) \longrightarrow [0,1]$ telle que :

(i) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$;

(ii) $\mathbb{P}$ est *additive* ie $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall (A_1, \dots, A_n)$ familles de parties de Ω :

$$(A_1, \dots, A_n) \text{ 2 à 2 incompatibles} \Longrightarrow \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k)$$

Si A est un évènement, alors le réel $\mathbb{P}(A)$ est appelé *probabilité de l'évènement A*.

En particulier pour $n = 2$ la propriété d'additivité donne :

$$\forall A, B \text{ parties de } \Omega, \quad \Big(A \cap B = \varnothing \Longrightarrow \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)\Big)$$

Définition 5 – Espace probabilisé fini

Un *espace probabilisé fini* est un couple $(\Omega, \mathbb{P})$ où Ω est un univers fini et $\mathbb{P}$ est une probabilité sur Ω.

Dans le théorème suivant, $\mathbb{P}$ est une probabilité et A et B sont deux évènements de Ω.

Théorème 6 – Propriétés d'une probabilité

(iii) $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$

(iv) $\mathbb{P}\left(\overline{A}\right) = 1 - \mathbb{P}(A)$

(v) $\mathbb{P}\left(A \cap \overline{B}\right) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)$ et donc si $B \subseteq A$, alors $\mathbb{P}\left(A \cap \overline{B}\right) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B)$

(vi) si $A \subseteq B$, alors $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$

(vii) $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

✎ ***Exemple.*** Si $(A_1, \dots, A_n)$ est un s.c.e. alors $\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k) = 1$ (mais la réciproque est fausse).

✎ ***Exemple.*** Si A, B et C sont trois évènements déterminer $\mathbb{P}\big(A \cup B \cup C\big)$ en fonction de $\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(B)$ et $\mathbb{P}(C)$.

En général, si $(A_1, \dots, A_n)$ est une famille d'évènements quelconques de Ω, on dispose de la formule du crible de Poincaré :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \left((-1)^{k-1} \times \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n} \mathbb{P}\big(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}\big)\right)$$

mais celle-ci n'est pas au programme de PCSI.

2.2 Construction de probabilités

Pour définir une probabilité $\mathbb{P}$ sur Ω, il faut se donner $\mathbb{P}(A)$ pour tout $A \in \mathscr{P}(\Omega)$, ce qui n'est pas toujours possible.

On va démontrer qu'il suffit de définir $\mathbb{P}$ sur les évènements élémentaires, c'est-à-dire qu'il suffit de connaître $\mathbb{P}\big(\{\omega\}\big)$ pour tout $\omega \in \Omega$ pour connaître $\mathbb{P}(A)$ pour tout $A \in \mathscr{P}(\Omega)$. Cela simplifie les choses car si $n = \mathrm{Card}(\Omega)$ alors la connaissance des n probabilités des évènements élémentaires permet de calculer les 2^n probabilités de tous les évènements qu'on peut considérer.

Dans la suite, on note $n = \mathrm{Card}(\Omega)$ et $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$.

Si $\mathbb{P}$ est une probabilité sur Ω, on note $p_1 = \mathbb{P}\big(\{\omega_1\}\big)$, $p_2 = \mathbb{P}\big(\{\omega_2\}\big)$, …, $p_n = \mathbb{P}\big(\{\omega_n\}\big)$. Les réels p_1, p_2, …, p_n vérifient :

$$\forall k \in [\![1, n]\!],\ p_k \in [0, 1] \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=1}^{n} p_k = 1$$

Ce sont les probabilités des évènements élémentaires de Ω.

Nous allons voir que les deux propriétés ci-dessus suffisent à définir complètement une probabilité sur Ω.

Théorème 7 – Définition d'une probabilité sur un univers fini

On se donne des réels p_1, …, p_n vérifiant :

- ils sont positifs ;
- $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Alors il existe une unique probabilité $\mathbb{P}$ sur Ω telle que : $\forall k \in [\![1, n]\!],\ p_k = \mathbb{P}\big(\{\omega_k\}\big)$.

Donc pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $p_k \in [0, 1]$.

Cette unique probabilité $\mathbb{P}$ est définie par :

$$\forall A \in \mathscr{P}(\Omega), \quad \mathbb{P}(A) = \sum_{\substack{i \in [\![1,n]\!] \\ \omega_i \in A}} p_i$$

Par exemple, si $A = \{\omega_2, \omega_5, \omega_6\}$, alors : $\mathbb{P}(A) = p_2 + p_5 + p_6$.

En pratique, il suffit donc de connaître la probabilité des évènements élémentaires, pour être capable de calculer la probabilité de n'importe quel évènement.

✎ ***Exemple.*** On lance un dé à 6 faces : $\Omega = [\![1,6]\!]$. On définit une probabilité $\mathbb{P}$ sur Ω par :

$$p_1 = p_2 = p_3 = \frac{1}{12}; \quad p_4 = p_5 = p_6 = \frac{1}{4}$$

ce qui modélise un dé *truqué*.
On a alors $\mathbb{P}($ « Obtenir un chiffre pair » $) = p_2 + p_4 + p_6 = \dfrac{7}{12}$.

✎ ***Exemple.*** On reprend le même univers Ω et on définit une autre probabilité $\mathbb{Q}$ par :

$$q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = q_5 = q_6 = \frac{1}{6}$$

ce qui modélise un dé *équilibré*.
On a alors $\mathbb{Q}($ « Obtenir un chiffre pair » $) = q_2 + q_4 + q_6 = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$.

On voit sur ces deux exemples qu'on effectue la même expérience aléatoire : lancer un dé à 6 faces. Le choix de la probabilité permet de traduire le fait que le dé est *équilibré* ou *truqué*.

Définition 8 – Équiprobabilité

L'unique probabilité définie par :

$$p_1 = p_2 = \cdots = p_n = \tfrac{1}{n}$$

est appelée *probabilité uniforme* sur Ω.

Pour tout évènement A, on a alors la formule bien connue :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\mathrm{Card}(A)}{\mathrm{Card}(\Omega)} = \frac{\text{nombre de cas favorables à } A}{\text{nombre de cas possibles dans l'univers}}$$

3 Probabilités conditionnelles

Dans tout ce paragraphe, on se place sur un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathbb{P})$.

3.1 Définition

Intuitivement : si on lance un dé cubique, équilibré, on devine que sachant que le chiffre obtenu est pair, la probabilité d'obtenir un nombre inférieur ou égal à 5 est égale à $\frac{2}{3}$.
D'autre part, on introduit les évènements :

$$A = \text{« obtenir un chiffre inférieur ou égal à } 5 \text{ »} \qquad \text{et} \qquad B = \text{« obtenir un chiffre pair »}$$

Comme on est en situation d'équiprobabilité, on trouve $\mathbb{P}(A) = \frac{5}{6}$, $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{2}$ *et* $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{2}{6}$.
On remarque alors que $\frac{2}{3} = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$.

Cet exemple motive la définition suivante.

Définition 9 – Probabilité conditionnelle

Soient A et B deux évènements tels que $\mathbb{P}(B) \neq 0$.
On appelle *probabilité conditionnelle de A sachant B*, le réel $\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$.

⚠ En général on ne peut pas comparer les valeurs de $\mathbb{P}(A)$ et $\mathbb{P}_B(A)$, comme le montre l'exemple suivant.

✎ ***Exemple.*** On lance deux dés distinguables à 6 faces, équilibrés.
On considère les évènements A = « la somme des deux chiffres obtenus est 5 », B = « le premier dé donne 3 », et C = « le premier dé donne au moins 3 ».
Alors $\mathbb{P}_C(A) < \mathbb{P}(A) < \mathbb{P}_B(A)$.

$\mathbb{P}_B(A)$ est aussi notée $\mathbb{P}(A|B)$.

⚠ Il n'existe pas d'évènement $A|B$ = « A sachant B ».
Pour cette raison il est préférable d'utiliser la notation $\mathbb{P}_B(A)$ au lieu de la notation $\mathbb{P}(A|B)$. Elle réprésente la probabilité de A du point de vue de quelqu'un qui sait déjà que B est réalisé.

Théorème 10 – Propriétés de $\mathbb{P}_B$

Soit B un évènement tel que $\mathbb{P}(B) \neq 0$.

1. Pour tout $A \in \mathscr{P}(\Omega)$, on a : $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}_B(A)$.
2. $\mathbb{P}_B$ est une probabilité sur Ω.

En particulier si A_1 et A_2 sont deux évènements :

$$\mathbb{P}_B(A_1 \cup A_2) = \mathbb{P}_B(A_1) + \mathbb{P}_B(A_2) - \mathbb{P}_B(A_1 \cap A_2) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}_B\left(\overline{A}\right) = 1 - \mathbb{P}_B(A)$$

On utilise rarement la définition pour calculer $\mathbb{P}_B(A)$; on préfère la déduire de l'énoncé de l'expérience aléatoire. Comme dit ci-dessus, cela revient intuitivement à calculer la probabilité de A du point de vue d'un observateur qui sait déjà que B est réalisé (un peu comme s'il arrivait en plein milieu de l'expérience aléatoire).

✎ ***Exemple.*** Une urne contient 4 boules blanches et 6 boules noires. On pioche 3 boules une par une et sans remise. Si les deux premiers tirages donne une boule blanche et une boule noire, déterminer la probabilité d'obtenir une boule blanche au troisième tirage.

3.2 Formule des probabilités composées

Théorème 11 – Formule des probabilités composées

Soit $(A_1, \ldots, A_n)$ des évènements tels que $\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n-1} A_k\right) \neq 0$. Alors :

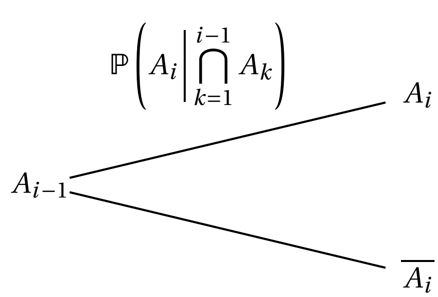
$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}_{A_1}(A_2) \times \mathbb{P}_{A_1 \cap A_2}(A_3) \times \cdots \times \mathbb{P}_{\bigcap_{k=1}^{n-1} A_k}(A_n) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}\left(A_i \,\middle|\, \bigcap_{k=1}^{i-1} A_k\right)$$

avec la convention que, pour $i = 1$: $\mathbb{P}\left(A_i \,\middle|\, \bigcap_{k=1}^{i-1} A_k\right) = \mathbb{P}(A_1)$.

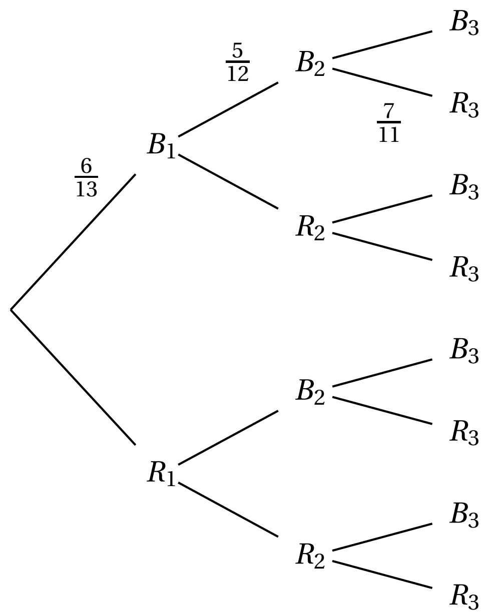
Cette formule est aussi appelée *formule du conditionnement multiple.*

Interprétation sur un arbre :

D'un *noeud* A_{i-1} à un *noeud* A_i, on trace une *arête* étiquetée par la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}\left(A_i \,\middle|\, \bigcap_{k=1}^{i-1} A_k\right)$. La probabilité de la *branche complète* (= suite d'arêtes consécutives) est alors obtenue en multipliant entre elles les probabilités conditionnelles placées sur les arêtes.



✎ ***Exemple.*** On considère une urne composée de 6 boules blanches et 7 boules rouges. On effectue 3 tirages successifs d'une boule sans remise. Pour $i = 1$, 2 et 3, on pose $B_i =$ « le i-ième tirage donne une boule blanche », et on définit de même l'évènement R_i.



Alors : $\mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap R_3) = \mathbb{P}(B_1) \times \mathbb{P}_{B_1}(B_2) \times \mathbb{P}_{B_1 \cap B_2}(R_3) = \dfrac{6}{13} \times \dfrac{5}{12} \times \dfrac{7}{11}$

On peut retrouver le résultat par dénombrement : $\mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap R_3) = \dfrac{A_6^2 \times A_7^1}{A_{13}^3} = \dfrac{6 \times 5 \times 7}{13 \times 12 \times 11}$

⚠ ATTENTION : il faut respecter l'ordre chronologique dans le conditionnement ! Sur l'exemple précédent on pouvait aussi écrire que $\mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap R_3) = \mathbb{P}(R_3) \times \mathbb{P}_{R_3}(B_2) \times \mathbb{P}_{B_2 \cap R_3}(B_1)$ mais cela ne permet pas de faire le calcul !

3.3 Formule des probabilités totales

Théorème 12 – Formule des probabilités totales

On se donne un système complet d'évènements $(A_1, \dots, A_n)$ de probabilités non nulles. Pour tout évènement B, on a :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(B \cap A_k) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k) \times \mathbb{P}_{A_k}(B)$$

Si un des A_k est de probabilité nulle, alors $\mathbb{P}_{A_k}(B)$ n'est pas définie, mais on peut écrire :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(B \cap A_k)$$

Avec la convention que $\mathbb{P}(A_k) \times \mathbb{P}_{A_k}(B) = 0$ lorsque $\mathbb{P}(A_k) = 0$, on retrouve la même formule que dans le théorème :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k) \times \mathbb{P}_{A_k}(B)$$

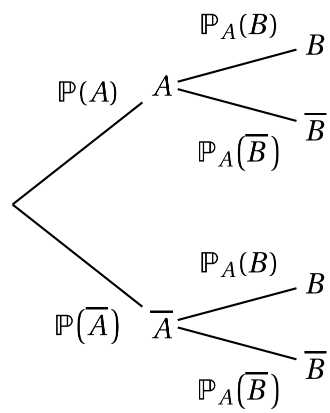
Cette convention est souvent utilisée car en pratique, car elle dispense de vérifier que tous les A_k, pour $k \in [\![1, n]\!]$, sont de probabilité non nulle.

La formule des probabilités totales est très utile lorsqu'on effectue une expérience aléatoire en plusieurs étapes. Elle permet de raisonner par disjonction des cas, suivant le résultat de la première étape.

Interprétation sur un arbre :

On considère un arbre dont les noeuds de première génération sont A_1, ..., A_n, et dont les noeuds de seconde génération sont B et $\overline{B}$. Pour calculer $\mathbb{P}(B)$, on multiplie les probabilités le long d'une branche et on additionne les résultats obtenus pour chaque branche.

Par exemple avec un s.c.e. à deux évènements $\left(A, \overline{A}\right)$:

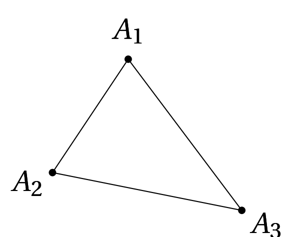


On lit sur l'arbre la formule :

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(B) + \mathbb{P}\left(\overline{A}\right) \times \mathbb{P}_{\overline{A}}(B)$$

✎ ***Exemple.*** On dispose de deux pièces : l'une honnête, l'autre truquée avec deux faces pile. On choisit une pièce au hasard et on la lance. Alors $\mathbb{P}($ « obtenir pile » $) = \dfrac{3}{4}$.

✎ ***Exemple.* Chaîne de Markov**. On considère un point qui se déplace sur les sommets d'un triangle $A_1A_2A_3$:

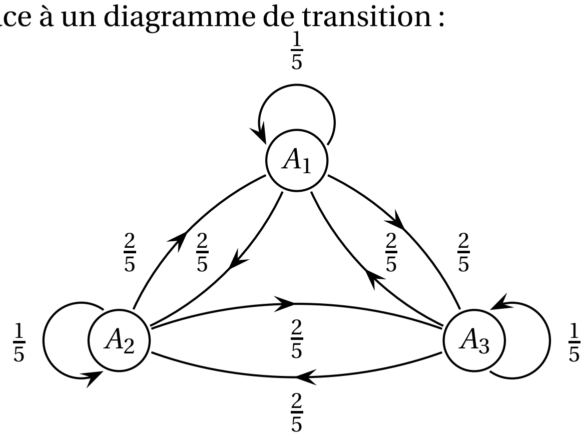


On suppose qu'initialement le point se trouve en A_1. Ensuite les déplacements s'effectuent de la manière suivante :

• si le point est en A_i alors il passe en A_j $(j \neq i)$ avec probabilité $\dfrac{2}{5}$ dans les deux cas ;

• le point reste en A_i avec probabilité $\dfrac{1}{5}$.

On peut résumer ceci grâce à un diagramme de transition :



Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on introduit les évènements :

• U_n = « Après n déplacements le point se trouve en A_1 » ;

• V_n = « Après n déplacements le point se trouve en A_2 » ;

• W_n = « Après n déplacements le point se trouve en A_3 ».

On pose alors, pour tout $n \geq 1$: $u_n = \mathbb{P}(U_n)$, $v_n = \mathbb{P}(V_n)$ et $w_n = \mathbb{P}(W_n)$.

Les conditions initiales sont $u_0 = 1$, $v_0 = 0$, $w_0 = 0$, et grâce à la formule des probabilités totales, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{2}{5}v_n + \frac{2}{5}w_n \\ \\ v_{n+1} = \frac{2}{5}u_n + \frac{1}{5}v_n + \frac{2}{5}w_n \\ \\ w_{n+1} = \frac{2}{5}u_n + \frac{2}{5}v_n + \frac{1}{5}w_n \end{cases}$$

On peut alors déterminer les expressions de u_n, v_n et w_n en fonction de n, grâce au calcul matriciel. En effet, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = A \times \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$$

où A est la matrice donnée par $A = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

On en déduit que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = A^n \times \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$.

Le problème est donc ramené au calcul des puissances de la matrice A.

3.4 Formule de Bayes

On va essayer de relier les probabilités conditionnelles $\mathbb{P}_B(A)$ et $\mathbb{P}_A(B)$, ce qui permettra en pratique « d'inverser causes et conséquences ».

Théorème 13 – Formule de Bayes

On se donne un système complet d'évènements $(A_1, \dots, A_n)$ de probabilités non nulles. Pour tout évènement B de probabilité non nulle, on a :

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \quad \mathbb{P}_B(A_i) = \frac{\mathbb{P}_{A_i}(B) \times \mathbb{P}(A_i)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}_{A_i}(B) \times \mathbb{P}(A_i)}{\sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{P}_{A_k}(B) \times \mathbb{P}(A_k)}$$

En particulier avec un s.c.e. de la forme $\left(A, \overline{A}\right)$:

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}_A(B) \times \mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}_A(B) \times \mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}_A(B) \times \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}_{\overline{A}}(B) \times \mathbb{P}\left(\overline{A}\right)}$$

✎ ***Exemple.*** **Test d'une maladie rare.** Un laboratoire propose un test de dépistage d'une maladie. La notice précise la qualité du test :
• lorsque le test est appliqué à une personne malade, le test est positif dans $99,8\%$ des cas ;
• lorsqu'il est appliqué à une personne saine, il est négatif dans $99,6\%$ des cas.
D'autre part, on sait qu'une personne sur 100 000 est malade. Peut-on avoir confiance en ce test ?

4 Indépendance

Dans tout ce paragraphe, on se place sur un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathbb{P})$.

4.1 Indépendance de deux évènements

On se donne A et B deux évènements quelconques.

Définition 14 – Indépendance de deux évènements

On dit que A et B sont *indépendants* lorsque $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$.

On le note $A \perp\!\!\!\perp B$.

Le résultat suivant donne un sens intuitif à cette définition.

Proposition 15 – Lien entre indépendance et probabilité conditionnelle

Si $\mathbb{P}(B) \neq 0$: $\qquad A \perp\!\!\!\perp B \iff \mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A)$

En pratique, l'indépendance n'est pas démontrée, mais fait partie des hypothèses de modélisation. Elle permet de simplifier les calculs.

✎ ***Exemple.*** Lorsqu'on lance plusieurs fois une pièce de monnaie, ou lorsqu'on effectue plusieurs tirages avec remise dans une urne, on pourra supposer que les répétitions sont effectuées de manières indépendantes.

⚠ Ce n'est pas aussi simple que cela en à l'air ! Si on lance deux fois une pièce, les évènements A = « obtenir pile au premier lancer » et B = « obtenir face au second lancer » sont indépendants, mais les évènements C = « obtenir au moins une fois pile » et B = « obtenir au mpoins une fois face » ne le sont pas.

⚠ La notion d'indépendance dépend du choix de la probabilité $\mathbb{P}$. En particulier si on a trois évènements A, B et C, on peut avoir A et B non indépendants pour $\mathbb{P}$, mais A et B indépendants pour $\mathbb{P}$ sachant C (ie pour $\mathbb{P}_C$) :

$$\mathbb{P}(A \cap B) \neq \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B) \quad \text{mais} \quad \mathbb{P}_C(A \cap B) = \mathbb{P}_C(A) \times \mathbb{P}_C(B)$$

✎ ***Exemple.*** On dispose de deux pièces : un équilibrée et une truquée (deux piles). On lance un dé (non truqué) à 6 faces :

- si on obtient le chiffre 1, on lance deux fois la pièce équilibrée ;
- si on obtient un chiffre différent de 1, on lance deux fois la pièce truquée.

On note A = « obtenir pile au premier lancer de la pièce », B = « obtenir pile au second lancer de la pièce », et C = « le lancer du dé donne le chiffre 1 ».
Alors $A \perp B$ pour $\mathbb{P}_C$ (et pour $\mathbb{P}_{\overline{C}}$), mais $A \not\perp B$ pour $\mathbb{P}$.

Proposition 16 – Indépendance et contraire

Si $A \perp B$, alors $A \perp \overline{B}$, $\overline{A} \perp B$ et $\overline{A} \perp \overline{B}$.

⚠ Ne pas confondra avec A et B incompatibles : $A \cap B = \emptyset$. Dans ce cas, $\overline{A}$ et B ne sont jamais incompatibles puisque $B \subseteq \overline{A}$!

4.2 Indépendance mutuelle

On se donne n évènements $A_1, A_2, \dots, A_n$.

Définition 17 – Indépendance deux à deux

On dit que $A_1, A_2, \dots, A_n$ sont *deux à deux indépendants* lorsque :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad i \neq j \Longrightarrow A_i \perp\!\!\!\perp A_j$$

On a donc : $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}(A_2)$. Mais par contre, on ne peut rien dire sur $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$. Pour cela on a besoin d'une notion plus forte.

Définition 18 – Indépendance mutuelle

On dit que $A_1, A_2, \dots, A_n$ sont *mutuellement indépendants* lorsque :

$$\forall J \subseteq [\![1,n]\!], \quad \mathbb{P}\left(\bigcap_{k \in J} A_k\right) = \prod_{k \in J} \mathbb{P}(A_k)$$

Dans ce cas on peut dire que : $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}(A_2) \times \mathbb{P}(A_3)$. L'indépendance mutuelle est donc la bonne hypothèse de modélisation pour simplifier les calculs.

En pratique, l'hypothèse d'indépendance mutuelle fera partie des hypothèses de modélisation. Elle ne sera pas démontrée.

4.2.1 Propriétés de l'indépendance

On se donne une famille finie d'évènements $(A_1, \dots, A_n)$.

Théorème 19 – Lien entre indépendance mutuelle et indépendance deux à deux

Si les évènements $(A_1, \dots, A_n)$ sont mutuellement indépendants, alors ils sont deux à deux indépendants.

⚠ ATTENTION : la réciproque est fausse, comme le montre le contre-exemple suivant.

✎ ***Exemple.*** On jette deux dès non-pipés, un noir et un blanc. Montrez que les évènements suivants sont deux à deux indépendants, mais ne sont pas mutuellement indépendants :

- A = « le chiffre du dè noir est pair »,
- B = « le chiffre du dè blanc est impair »,
- C = « les chiffres des deux dès ont même parité ».

Théorème 20 – Lemme des coalitions

On suppose que les évènements $(A_1, \dots, A_n)$ sont mutuellement indépendants.

1. Si pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $B_k = A_k$ ou $\overline{A_k}$, alors les évènements $(B_1, \dots, B_n)$ sont encore mutuellement indépendants.
2. Pour toute partie $J \subseteq [\![1,n]\!]$, les $(A_k)_{k \in J}$ sont aussi mutuellement indépendants.
3. Pour toute partie $J \subseteq [\![1,n]\!]$, tout évènement construit à partir de $(A_k)_{k \in J}$ est indépendant de tout évènement construit à partir de $(A_k)_{k \notin J}$.

✎ ***Exemple.*** On lance 5 fois une pièce de monnaie, et on note A = « obtenir pile aux deux premiers lancers », B = « obtenir pile aux lancers numéros 3 à 5 » et C = « obtenir pile aux lancers numéros 2 à 5 ».
Alors A et B sont indépendants, mais A et C (et de même B et C) pourraient ne pas l'être.

5 Compétences à acquérir sur ce chapitre

➥ Connaître les notions d'univers et d'évènements.

- ✪ Maîtriser le formalise qui relie des prédicats en français aux parties de l'univers Ω.
- ✪ Maîtriser les calculs d'évènements avec les opérations $\bigcup$, $\bigcap$ et complémentaire.

➥ Maîtriser le calcul des probabilités.

- ✪ Ne pas confondre évènements incompatibles et évènements indépendants.
- ✪ Connaître les trois grandes formules : formule des probabilités totales, formule des probabilités composés et formule de Bayes.
- ✪ Reconnaître les situations d'équiprobabilité et utiliser du dénombrement.
- ✪ Savoir trouver des probabilités conditionnelles directement dans l'énoncé de l'exercice.

6 Exercices

Calcul des probabilités

EXERCICE 1. Inégalité d'Edith Kosmanek

On se donne un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathbb{P})$.

1. Soient A et B deux évènements. Si A et B sont incompatibles, montrer que $\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) \leq \frac{1}{4}$.
2. Soient A et B deux évènements.
   (a) Vérifier que : $\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B)\mathbb{P}\left(\overline{A}\right) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}\left(\overline{A} \cap B\right)$
   (b) En déduire l'inégalité d'Édith Kosmanek : $\left|\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\right| \leq \frac{1}{4}$
   (c) Peut-on avoir égalité (on demande simplement un exemple) ?

EXERCICE 2. Le problème des anniversaires

On considère une classe de n élèves. Pour chaque élève, on suppose que chaque jour de l'année a la même probabilité d'être le jour de son anniversaire et on ne prend pas en compte les années bissextiles.

1. Calculez la probabilité que deux élèves au moins de cette classe aient leur anniversaire le même jour. À partir de combien d'élèves cette probabilité devient supérieure à 0.5 ? A 0.8 ? Comment interpréter ce résultat ?
2. Calculez la probabilité qu'au moins un élève soit né le même jour que le professeur. Comparez le résultat obtenu avec le précédent.

EXERCICE 3. Le biliothécaire fou

Un bibliothécaire fou permute au hasard les n livres de sa bibliothèque.

1. (a) Quelle est la probabilité que les volumes 1 et 2 de "Guerre et Paix" de Tolstoï se retrouvent côte à côte dans le bon ordre ?
   (b) Dans n'importe quel ordre ?
2. (a) Quelle est la probabilité qu'aucun livre n'ait changé de place ?
   (b) Qu'exactement un livre ait changé de place ?
   (c) Qu'exactement deux livres aient changé de place ?

Probabilités conditionnelles

EXERCICE 4. Cartes bicolores

On considère trois cartes : une avec les deux faces rouges, une avec les deux faces blanches, et une avec une face rouge et une face blanche. On tire une carte au hasard, on expose une face au hasard : elle est rouge.
Quelle est la probabilité que la face cachée soit blanche ? (Construisez d'abord un arbre adéquat).

EXERCICE 5. Mon voisin a deux enfants

Mon voisin a deux enfants dont une fille. Quelle est la probabilité que l'autre enfant soit un garçon ?
Ma voisine a deux enfants. Le plus jeune est une fille. Quelle est la probabilité pour que le plus âgé soit un garçon ?

EXERCICE 6. Le parapluie

On cherche un parapluie qui avec la probabilité $p/7$ se trouve dans l'un quelconque des sept étages d'un immeuble ($0 \le p \le 1$).

1. Quelle est la probabilité que la parapluie se trouve dans l'immeuble ?
2. On a exploré en vain les six premiers étages. Quelle est la probabilité que le parapluie se trouve au septième étage ?

EXERCICE 7. Tirages sans remise

Considérons une urne contenant six boules blanches et quatre boules rouges.

1. Quelle est la probabilité de la suite "blanc, blanc, rouge" si on tire 3 boules sans remise ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir au total deux blanches et une rouge si on tire 3 boules sans remise ?

EXERCICE 8. n urnes

On considère n urnes ($n \ge 1$), numérotées de 1 à n. L'urne numérotée k contient k boules blanches et $n-k$ boules noires. On choisit au hasard une urne puis une boule dans cette urne. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche ?

EXERCICE 9. Le fumeur

Un fumeur décide d'arrêter de fumer. On admet que s'il ne fume pas un jour, la probabilité qu'il ne fume pas le lendemain est de 0.3. Par contre, s'il fume un jour donné, la probabilité pour qu'il ne fume pas le lendemain est 0.9. Notons A_n l'évènement « la personne fume le jour n » et $p_n = \mathbb{P}(A_n)$.

1. Trouver une relation entre p_{n+1} et p_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Calculer p_n en fonction de p_1 et de n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$.

EXERCICE 10. Les Rigolus et les Tristus

Sur Orion, les Rigolus et les Tristus cherchent à faire la paix. Heureusement, il y a trois fois plus de Rigolus que de Tristus. Pour la paix, les Rigolus sont à 60% favorables, 16% y sont opposés et 24% sont sans opinion. Par contre, pour la guerre, les Tristus sont à 68% favorables, 12% opposés et 20% sans opinion. Vous rencontrez par hasard un habitant d'Orion et vous lui demandez son opinion.

1. Calculer la probabilité qu'il soit sans opinion.
2. S'il vous répond qu'il est favorable à la paix, quelle est la probabilité qu'il soit un Rigolus ?
3. Finalement, s'il vous répond qu'il est favorable à la guerre, quelle est la probabilité qu'il soit un Tristus ?

Indépendance

EXERCICE 11. Trois dés

On jette trois un dé à 6 faces. Calculez :

1. la probabilité d'avoir exactement un 6.
2. la probabilité d'obtenir au moins un 6.
3. la probabilité d'obtenir au moins deux faces identiques.
4. la probabilité d'obtenir une paire.
5. la probabilité d'obtenir un triple.
6. la probabilité d'obtenir dans cet ordre le chiffre 2, un chiffre pair puis un chiffre supérieur ou égal à 3.

EXERCICE 12. Indépendance mutuelle

On jette deux dès non-pipés, un noir et un blanc. Montrez que les évènements suivants sont deux à deux indépendants, mais ne sont pas mutuellement indépendants :

- « le chiffre du dè noir est pair »,
- « le chiffre du dè blanc est impair »,
- « les chiffres des deux dès ont même parité ».

EXERCICE 13. Bilan sur les urnes

1. On dispose d'une urne contenant 3 boules blanches numérotées de 1 à 3 et deux boules noires numérotées de 4 à 5.
   (a) On tire une à une successivement trois boules de l'urne, sans remise. Calculer la probabilité d'obtenir, dans cet ordre, deux boules blanches, puis une noire ? Dans n'importe quel ordre ?
   (b) Mêmes question pour des tirages avec remise.
   (c) Calculer la probabilité d'obtenir, deux boules blanches et une noire lors d'un tirage simultané de trois boules.

2. Dans une urne, on place 7 boules blanches et 3 boules noires. On tire successivement avec remise quatre boules de l'urne. On note N l'événement "obtenir une boule noire" et B l'événement "obtenir une boule blanche".
   (a) Quelle est la probabilité pour que l'on obtienne le résultat (N, N, B, B) dans cet ordre ?
   (b) Quelle est la probabilité d'obtenir deux boules blanches exactement ?
   (c) Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une boule blanche ?

EXERCICE 14. Le jeu de pile ou face

On considère une suite lancers indépendants d'une pièce truquée pour laquelle la probabilité d'obtenir "pile" est p et la probabilité d'obtenir "face" est $q = 1 - p$ ($p \in]0, 1[$).

1. (a) Pour $n \geqslant 1$, on considère l'événement A_n : "La séquence PF apparaît pour la première fois aux lancers $(n-1)$ et n." Calculer $\mathbb{P}(A_n)$.
   (b) Par analyse à un pas, vérifier que $\forall n \geq 1$, $\mathbb{P}(A_n) = q\mathbb{P}(A_{n-1}) + p^{n-1}q$. Retrouver alors l'expression de $\mathbb{P}(A_n)$.
2. Pour $n \geqslant 1$, on considère l'événement B_n : "La séquence PP apparaît pour la première fois aux lancers $(n-1)$ et n sans qu'il n'y ait eu de séquence PF auparavant." Calculer $\mathbb{P}(B_n)$.

EXERCICE 15. La pièce et les deux dés

On dispose de 2 dès A et B. Le dé A a 4 faces rouges et 2 faces blanches. Le dé B a 2 faces rouges et 4 faces blanches. On lance une pièce de monnaie truquée telle que la probabilité d'obtenir « pile » soit 1/3.
- Si on obtient « pile » on décide de jouer uniquement avec le dè A ;
- Si on obtient « face » on décide de jouer uniquement avec le dè B.

1. Calculer la probabilité d'obtenir « rouge » au premier coup, puis au deux premiers coups. Les évènements « obtenir rouge au premier coup » et « obtenir rouge au second coup » sont-ils indépendants ?
2. On a obtenu « rouge » aux deux premiers coups. Calculer la probabilité d'obtenir « rouge » au troisième coup.
3. On a obtenu « rouge » aux n premiers coups ($n \in \mathbb{N}^*$). Déterminer la probabilité p_n d'avoir utilisé le dè A.

Sujets d'étude

EXERCICE 16. Alphonse et Bernard

Alphonse et Bernard tirent au pistolet sur une cible suivant les règles suivantes :
- Ils tirent chacun leur tour. Le premier qui atteint la cible a gagné.
- Lorsqu'il tire, Alphonse atteint la cible avec la probabilité a ($0 < a < 1$) et il la rate avec la probabilité $\overline{a} = 1 - a$.
- Lorsqu'il tire, Bernard atteint la cible avec la probabilité b ($0 < b < 1$) et il la rate avec la probabilité $\overline{b} = 1 - b$.
- Alphonse tire le premier.

Ainsi, Alphonse (resp. Bernard) n'effectue que des tirs de rang impair (resp. pair).

On considère, pour tout entier $n \geq 1$, les événements A_{2n-1} : « Alphonse gagne à l'issue du tir numéro $2n-1$ », B_{2n} : « Bernard gagne à l'issue du tir numéro $2n$ ».

1. Calculez, en fonction de a et b, les probabilités des événements A_1, B_2 et A_3. Plus généralement, calculez $\mathbb{P}(A_{2n-1})$ et $\mathbb{P}(B_{2n})$.
2. Pour $n \geq 1$, on note C_n (resp. D_n) l'événement : « Alphonse (resp. Bernard) gagne à un tir dont le numéro est entre 1 et $2n-1$ (resp. entre 2 et $2n$). » Calculer $\mathbb{P}(C_n)$ et $\mathbb{P}(D_n)$.
3. Calculer $\alpha = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(C_n)$ et $\beta = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(D_n)$. Vérifier que $\alpha + \beta = 1$.
4. On dit que le jeu est équilibré lorsque $\alpha = \beta = 1/2$. Si $a = 1/3$ pour quelles valeurs de b le jeu est-il équilibré ?

EXERCICE 17. La ruine du joueur

Un joueur joue à un jeu d'argent contre le casino. On suppose qu'initialement la fortune du joueur est de $a \in \mathbb{N}$ et celle du casino de $N-a$, avec $0 \leqslant a \leqslant N$ et $N \in \mathbb{N}$.
Soit p un réel vérifiant $0 < p < 1$ et $p \neq 1/2$.
A chaque répétition du jeu on suppose que le joueur gagne 1 euros avec probabilité p ou perd 1 euros avec probabilité $q = 1-p$. Le jeu s'arrête dès que la fortune du joueur prend la valeur 0 (le joueur est ruiné) ou la valeur N (le casino est ruiné).

1. Soit u_a la probabilité que le joueur soit ruiné, étant initialement parti d'une fortune de a. On a en particulier $u_0 = 1$ et $u_N = 0$.
   (a) Montrer que pour tout entier a tel que $1 \leq a \leq N-1$, on a :
   $$u_a = pu_{a+1} + qu_{a-1}.$$
   (b) Vérifier que :
   $$u_a = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^a - \left(\frac{q}{p}\right)^N}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^N}$$
   Déterminer la limite de u_a lorsque $N \to +\infty$ et interpréter le résultat.
2. De même, calculer la probabilité v_a que le casino soit ruiné, le joueur étant initialement parti d'une fortune de a.
3. Calculer la somme $u_a + v_a$. En déduire la probabilité que le joueur et le casino s'affrontent indéfiniment.
4. Reprendre le calcul dans le cas $p = q = \dfrac{1}{2}$.