<u>dem th 8</u> On note $n = \dim \mathbb{E}$

Et on suppose que $\mathbb{E}$ est engendré par p vecteurs $\vec{u_1}, \dots, \vec{u_p}$: $\mathbb{E} = \mathrm{Vect}(\vec{u_1}, \dots, \vec{u_p})$

<u>1.</u> D'après le cor 3 on peut extraire de la famille $(\vec{u_1}, \dots, \vec{u_p})$ une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{E}$.

<u>2.</u> Alors comme $\mathcal{B}$ est une sous-famille de $(\vec{u_1}, \dots, \vec{u_p})$: $\mathrm{Card}\, \mathcal{B} \leq p$

et comme $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{E}$:

$$n = \dim(\mathbb{E}) = \mathrm{Card}(\mathcal{B})$$

Donc $n \leq p$.

<u>3.</u> $n = p \iff \mathrm{Card}(\mathcal{B}) = \mathrm{Card}(\vec{u_1}, \dots, \vec{u_p})$

$\iff \mathcal{B} = (\vec{u_1}, \dots, \vec{u_p})$

$\mathcal{B}$ sous famille de $(\vec{u_1}, \dots, \vec{u_p})$ $\iff (\vec{u_1}, \dots, \vec{u_p})$ est une base de $\mathbb{E}$ (dès le départ).

dem th 9 On note $n = \dim(E)$

et on se donne $(\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n})$ une base de E.

On suppose que $(\vec{u_1}, \dots, \vec{u_p})$ est une famille libre de vecteurs de E.

1. On considère l'algorithme suivant.

Initialisation $\mathcal{B} \overset{\text{def}}{=} (\vec{u_1}, \dots, \vec{u_p})$

Boucle tant que

Tant que $\mathrm{Vect}(\mathcal{B}) \subsetneq E$

on choisit un vecteur de E qui n'est pas dans $\mathrm{Vect}(\mathcal{B})$. On l'ajoute à la famille $\mathcal{B}$.

Sortie On renvoit la famille $\mathcal{B}$.

Dans l'initialisation : $\mathcal{B}$ est libre.

Dans la boucle, $\mathcal{B}$ est augmentée pas à pas d'un vecteur, en conservant le fait $\mathcal{B}$ est libre, grâce au principe d'extension d'une famille libre [th 28 chap 13].

Donc en sortie de boucle on a $\mathcal{B}$ libre et $\mathrm{Vect}(\mathcal{B}) = E$

donc $\mathcal{B}$ est une base de E contenant la famille $(\vec{u_1}, \dots, \vec{u_p})$.

Il reste à prouver que la boucle se termine.

D'après le th 4, les familles libres ont au maximum n vecteurs.

Donc $p \leq n$ et la boucle tourne au maximum $n-p$ fois.

2. C'est une conséquence du th 4 ou de 1.

3. $p = n \iff \mathcal{B} = (\vec{u_1}, \ldots, \vec{u_p})$

$\iff (\vec{u_1}, \ldots, \vec{u_p})$ est une base de E (dès le départ)

<u>Exemple 1</u> $\vec{u_1} = (1,1)$
$\vec{u_2} = (1,-1)$

$\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$ sont non colinéaires donc la famille $(\vec{u_1}, \vec{u_2})$ est libre. Elle est formée de 2 vecteurs et $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$ donc elle est <u>libre maximale</u> dans $\mathbb{R}^2$.

La famille $(\vec{u_1}, \vec{u_2})$ est donc <u>une base</u> de $\mathbb{R}^2$.

<u>Exemple 2</u> Si $\mathbb{F}$ est une droite vectorielle de $\mathbb{E}$ alors il existe $\vec{u} \in \mathbb{E}$ tel que $\vec{u} \neq \vec{0}_E$ et $\mathbb{F} = \mathrm{Vect}(\vec{u})$.

Alors pour tout $\vec{v} \in \mathbb{F} \setminus \{\vec{0}_E\}$ on a $\mathbb{F} = \mathrm{Vect}(\vec{v})$

En effet on a vu que $\dim(\mathbb{F}) = 1$ puisque $\mathbb{F}$ est une droite vectorielle.

Si $\vec{v} \in \mathbb{F} \setminus \{\vec{0}\}$ alors la famille $(\vec{v})$ est une famille libre maximale de $\mathbb{F}$ donc une base de $\mathbb{F}$.

En particulier elle est génératrice de $\mathbb{F}$: $\mathbb{F} = \mathrm{Vect}(\vec{v})$.

Exemple 3 Si $\mathbb{F}$ est un plan vectoriel de $\mathbb{E}$ alors il existe $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$ vecteurs de $\mathbb{E}$ non colinéaires tels que $\mathbb{F} = \mathrm{Vect}(\vec{u_1}, \vec{u_2})$.
Alors pour tous vecteurs $\vec{v_1}, \vec{v_2}$ de $\mathbb{F}$ non colinéaires on a $\mathbb{F} = \mathrm{Vect}(\vec{v_1}, \vec{v_2})$.

En effet on a vu que $\dim(\mathbb{F}) = 2$ puisque $\mathbb{F}$ est un plan vectoriel. Si $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ sont deux vecteurs de $\mathbb{F}$ non colinéaires alors la famille $(\vec{v_1}, \vec{v_2})$ est libre maximale dans $\mathbb{F}$ et est donc une base de $\mathbb{F}$.

En particulier elle est génératrice de $\mathbb{F}$: $\mathbb{F} = \mathrm{Vect}(\vec{v_1}, \vec{v_2})$

Exemple 4 C'est le th 4 mais cela devient évident avec le th de la base incomplète.

Exemple 5 On se donne $n+1$ polynômes non nuls de $\mathbb{K}_n[X]$ de degrés échelonnés : $P_0, P_1, \dots, P_n$ tq $\deg P_0 < \deg P_1 < \dots < \deg P_n \leq n$

donc $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $\deg(P_k) = k$.

La famille $(P_0, \dots, P_n)$ est donc libre. Elle est formée de $n+1$ vecteurs de $\mathbb{K}_n[X]$ et $\dim(\mathbb{K}_n[X]) = n+1$

donc elle est libre maximale dans $\mathbb{K}_n[X]$.

C'est donc une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Exemple du cor 10 $\quad P_1 = X^2$ et $P_2 = X^2+1$

P_1 et P_2 sont non colinéaires donc la famille (P_1, P_2) est libre.

$\dim(\mathbb{K}_2[X]) = 3$.

Donc il faut trouver $P_3 \notin \text{Vect}(P_1, P_2)$ et alors (P_1, P_2, P_3) sera libre maximale et donc une base de $\mathbb{K}_2[X]$.

On sait qu'on peut choisir P_3 dans la base canonique $(1, X, X^2)$. On choisit $P_3 = X$.

On se donne $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ scalaires tels que $\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \alpha_3 P_3 = 0$

Alors $\alpha_1 X^2 + \alpha_2 (X^2+1) + \alpha_3 X = 0_{\mathbb{K}[X]}$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$$

Donc la famille (P_1, P_2, P_3) est libre.

Comme dit ci-dessus elle est donc une base de $\mathbb{K}_2[X]$.