Chapitre 15

Espaces vectoriels de dimension finie

Sommaire

Dans tout ce chapitre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et $\mathbb{E}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

1 Espaces vectoriels de dimension finie

1.1 Dimension finie et existence de bases

Définition 1 – Espace vectoriel de dimension finie

On dit que $\mathbb{E}$ est de *dimension finie* lorsqu'il admet une famille génératrice finie.

Cela signifie qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ et $u_1, \ldots, u_p$ vecteurs de $\mathbb{E}$ tels que $\mathbb{E} = \mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_p)$.

Dans le cas contraire, on dit que $\mathbb{E}$ est de *dimension infinie*.

✎ ***Exemple.*** $\{0_{\mathbb{E}}\}$ est de dimension finie, même si $\mathbb{E}$ ne l'est pas.

✎ ***Exemple.*** Si $p \in \mathbb{N}^*$ et $u_1, \ldots, u_p$ sont des vecteurs de $\mathbb{E}$, alors $\mathbb{F} = \mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_p)$ est de dimension finie (même si $\mathbb{E}$ ne l'est pas).

✎ ***Exemple.*** Si $n \in \mathbb{N}^*$, alors $\mathbb{K}^n$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}_n[X]$ sont de dimension finie.

Théorème 2 – Existence de bases en dimension finie

Si $\mathbb{E}$ est de dimension finie, alors $\mathbb{E}$ possède des bases.

On peut préciser la façon d'obtenir des bases.

Corollaire 3 – Extraction de base d'une famille génératrice finie

Si $\mathbb{E}$ est de dimension finie et si $\mathscr{F}$ est une famille génératrice finie de $\mathbb{E}$, alors on peut extraire de $\mathscr{F}$ une base de $\mathbb{E}$.

Dire que la famille de vecteurs $\mathscr{B}$ est *extraite* de la famille de vecteurs $\mathscr{F}$ signifie que tous les vecteurs de $\mathscr{B}$ sont pris parmi les vecteurs de $\mathscr{F}$.

✎ ***Exemple.*** Donner une base de $\mathbb{E} = \mathrm{Vect}\big((X-1)^2, X^2, -2X+1\big)$ et de $\mathbb{E} = \mathrm{Vect}\big((1,0);(1,1);(0,2)\big)$.

Théorème 4 – Nombre de vecteurs d'une famille libre

Si $\mathbb{E}$ est engendré par n vecteurs, toute famille de $n+1$ vecteurs est liée.

Corollaire 5 – Condition suffisante de dimension infinie

Si $\mathbb{E}$ admet des familles libres avec un nombre quelconque de vecteurs, alors $\mathbb{E}$ est de dimension infinie.

⚠ Les espaces vectoriels $\mathbb{K}[X]$, $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ sont de dimension infinie.

1.2 Dimension d'un espace vectoriel

Théorème 6 – Nombre d'éléments des bases

Si $\mathbb{E}$ est de dimension finie, alors toutes ses bases ont le même nombre d'éléments.

Ce théorème permet de définir la notion de dimension.

Définition 7 – Dimension

Si $\mathbb{E}$ est de dimension finie, on appelle *dimension* de $\mathbb{E}$ le nombre d'éléments de ses bases.

C'est donc un nombre entier naturel ; il est noté $\dim(\mathbb{E})$.

On peut remarquer que : $\dim(\mathbb{E}) = 0 \iff \mathbb{E} = \{0_{\mathbb{E}}\}$.

Si $\mathbb{E}$ n'est pas réduit au vecteur nul, on peut donc dire que $\dim(\mathbb{E}) \geq 1$.

✎ ***Exemple.*** Dans $\mathbb{E}$, les droites vectorielles correspondent aux sous-espaces vectoriels de dimension 1.

✎ ***Exemple.*** Dans $\mathbb{E}$, les plans vectoriels correspondent aux sous-espaces vectoriels de dimension 2.

✎ ***Exemple.*** Si $n \in \mathbb{N}^*$, alors $\mathbb{K}^n$ est de dimension finie et $\dim\left(\mathbb{K}^n\right) = n$.

✎ ***Exemple.*** Si $n \in \mathbb{N}$, alors $\mathbb{K}_n[X]$ est de dimension finie et $\dim\left(\mathbb{K}_n[X]\right) = n+1$.

✎ ***Exemple.*** Si $(n,p) \in \left(\mathbb{N}^*\right)^2$, alors $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est de dimension finie et $\dim\left(\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})\right) = n \times p$.

⚠ $\mathbb{C}$ est de dimension finie en tant que $\mathbb{C}$-ev et aussi en tant que $\mathbb{R}$-ev.
Mais : $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) = 1$ et $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2$.

✎ ***Exemple.*** Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{E} = \left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \,/\, \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n\right\}$ est une droite vectorielle.

✎ ***Exemple.*** Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ fixé. Alors $\mathbb{E} = \left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}};\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n\right\}$ est un plan vectoriel.

✎ ***Exemple.*** Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ fixé. Alors $\mathbb{E} = \left\{y \in D^2(\mathbb{R};\mathbb{C});\ \forall t \in \mathbb{R},\ y''(t) + ay'(t) + by(t) = 0\right\}$ est un plan vectoriel.

1.3 Familles de vecteurs en dimension finie

Dans ce paragraphe, on suppose que $\mathbb{E}$ est de dimension finie notée n.

On se donne aussi $p \in \mathbb{N}^*$ et $\mathscr{F} = (u_1, \dots, u_p)$ une famille de p vecteurs de $\mathbb{E}$.

Théorème 8 – Familles génératrices en dimension finie : extraction d'une base

On suppose que $\mathbb{E}$ est engendré par la famille de vecteurs $\mathscr{F} = (u_1, \dots, u_p)$.
On a alors les propriété suivantes :

1. on peut extraire de $\mathscr{F}$ une famille de vecteurs qui est une base de $\mathbb{E}$;
2. $p \geq n$;
3. $\mathscr{F}$ est une base de $\mathbb{E} \iff p = n$

On retient souvent ce théorème sous la forme suivante : une famille de vecteurs *génératrice et minimale de* $\mathbb{E}$ est une base de $\mathbb{E}$.

Si $\mathscr{F} = (u_1, \dots, u_p)$ est une famille de vecteurs de $\mathbb{E}$, on a donc :

$$\dim\left(\mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_p)\right) \leq p$$

et on connaît le cas d'égalité :

$$\dim\left(\mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_p)\right) = p \iff \text{ les vecteurs } (u_1, \dots, u_p) \text{ forment une famille libre}$$

Théorème 9 – Familles libres en dimension finie : théorème de la base incomplète

On suppose que la famille de vecteurs $\mathscr{F} = (u_1, \dots, u_p)$ est libre.
On a alors les propriétés suivantes :

1. on peut compléter la famille de vecteurs $\mathscr{F}$ en une base de $\mathbb{E}$;
2. $p \leq n$;
3. $\mathscr{F}$ est une base de $\mathbb{E} \iff p = n$

On retient souvent ce théorème sous la forme suivante : une famille de vecteurs *libre et maximale de* $\mathbb{E}$ est une base de $\mathbb{E}$.

✎ ***Exemple.*** $\left((1,1);(1,-1)\right)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

✎ ***Exemple.*** Si $\mathbb{F}$ est une droite vectorielle de $\mathbb{E}$, tout vecteur $\vec{u} \neq \vec{0}_{\mathbb{E}}$ élément de $\mathbb{F}$ est une base de $\mathbb{F}$.

✎ ***Exemple.*** Si $\mathbb{F}$ est un plan vectoriel de $\mathbb{E}$, tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires et éléments de $\mathbb{F}$ forment une base de $\mathbb{F}$.

✎ ***Exemple.*** Dans un espace vectoriel de dimension n, toute famille de $n+1$ vecteurs ou plus est liée.

✎ ***Exemple.*** Dans $\mathbb{K}_n[X]$, $n+1$ polynômes non nuls de degrés échelonnés forment une base.

Corollaire 10 – Version précisée du théorème de la base incomplète

Si $\mathscr{G}$ est une famille de vecteurs génératrice de $\mathbb{E}$, alors on peut choisir des vecteurs dans $\mathscr{G}$ pour compléter la famille de vecteurs $\mathscr{F}$ en une base $\mathbb{E}$.

✎ ***Exemple.*** Compléter $\left(X^2, X^2+1\right)$ en une base de $\mathbb{K}_2[X]$.

Corollaire 11 – Principe des tiroirs en algèbre linéaire

Si $\mathbb{E}$ est de dimension n et si $\mathscr{F}$ est une famille de n vecteurs de $\mathbb{E}$, alors on a équivalence des trois propriétés :

(i) $\mathscr{F}$ est une base de $\mathbb{E}$;

(ii) $\mathscr{F}$ est libre ;

(iii) $\mathscr{F}$ est une famille génératrice de $\mathbb{E}$

2 Sous-espaces vectoriels en dimension finie

2.1 Inclusion et dimension

Théorème 12 – Sev d'un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie

Si $\mathbb{E}$ est de dimension finie, alors tous ses sev $\mathbb{F}$ sont aussi de dimension finie et vérifient :

$$\dim(\mathbb{F}) \leq \dim(\mathbb{E})$$

⚠ Il n'y a pas de réciproque : si $\dim(\mathbb{F}) \leq \dim(\mathbb{E})$, on ne peut pas dire que $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{E}$.
Par exemple dans $\mathbb{R}^3$ une droite n'est pas incluse dans n'importe quel plan.

Corollaire 13 – Cas d'égalité

Si $\mathbb{E}$ est de dimension finie et si $\mathbb{F}$ est un sev de $\mathbb{E}$ tel que $\dim(\mathbb{F}) = \dim(\mathbb{E})$, alors $\mathbb{F} = \mathbb{E}$.

2.2 Rang d'une famille de vecteurs

Dans ce paragraphe, on se donne $p \in \mathbb{N}^*$ et $\mathscr{F} = (u_1, \dots, u_p)$ une famille de p vecteurs de $\mathbb{E}$.

Définition 14 – Rang d'une famille de vecteurs

On appelle *rang* de la famille de vecteurs $\mathscr{F} = (u_1, \dots, u_p)$ la dimension du sous-espace vectoriel de $\mathbb{E}$ engendré par cette famille.

On le note $\text{rg}(\mathscr{F})$ ou $\text{rg}(u_1,\dots,u_p)$. On a donc :

$$\text{rg}(\mathscr{F}) = \dim\big(\text{Vect}(\mathscr{F})\big) \quad \text{ou encore} \quad \text{rg}(u_1,\dots,u_p) = \dim\big(\text{Vect}(u_1,\dots,u_p)\big)$$

Proposition 15 – Règles de calcul du rang d'une famille de vecteurs

1. Si $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $\alpha \neq 0$:
$$\text{rg}\big(u_1,\dots,u_{p-1},u_p\big) = \text{rg}\big(u_1,\dots,u_{p-1},\alpha.u_p\big)$$
2. $\text{rg}\big(u_1,\dots,u_{p-1},0_{\mathbb{E}}\big) = \text{rg}\big(u_1,\dots,u_{p-1}\big)$.
3. Si $(\lambda_1,\dots,\lambda_{n-1}) \in \mathbb{K}^{n-1}$:
$$\text{rg}\big(u_1,\dots,u_{p-1},u_p\big) = \text{rg}\left(u_1,\dots,u_{p-1},u_p + \sum_{k=1}^{p-1}\lambda_k.u_k\right)$$
4. Si u_p est CL de la famille de vecteurs $\big(u_1,\dots,u_{p-1}\big)$:
$$\text{rg}\big(u_1,\dots,u_{p-1},u_p\big) = \text{rg}\big(u_1,\dots,u_{p-1}\big)$$

Pour calculer le rang d'une famille de vecteurs, il faut donc extraire de $(u_1,\dots,u_p)$ une base de $\text{Vect}(u_1,\dots,u_p)$.

✎ ***Exemple.*** $\text{rg}\big((1,0,1);(1,1,0);(0,-1,1)\big) = 2$.

Théorème 16 – Propriétés du rang d'une famille de vecteurs

1. $\text{rg}(\mathscr{F}) = 0 \Longleftrightarrow u_1 = u_2 = \cdots = u_p = 0_{\mathbb{E}}$
2. $\text{rg}(u_1,\dots,u_p) \leq p$
3. $\text{rg}(u_1,\dots,u_p) = p \Longleftrightarrow (u_1,\dots,u_p)$ est libre

Théorème 17 – Propriétés du rang d'une famille de vecteurs en dimension finie

On suppose que $\mathbb{E}$ est de dimension finie, notée n.

1. $\text{rg}(u_1,\dots,u_p) \leq \min(n,p)$
2. $\text{rg}(u_1,\dots,u_p) = n \Longleftrightarrow \mathbb{E}$ est engendré par les vecteurs $(u_1,\dots,u_p)$

Si $\mathbb{E}$ est de dimension finie n et si $p = n$:

$$\text{rg}(u_1,\dots,u_n) = n \Longleftrightarrow \text{la famille de vecteurs } (u_1,\dots,u_n) \text{ est une base de } \mathbb{E}$$

2.3 Sommes de sev en dimension finie

Dans ce paragraphe on suppose que $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$ sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{E}$.

Théorème 18 – Existence d'un supplémentaire en dimension finie

On suppose que $\mathbb{E}$ est de dimension finie et que $\mathbb{F}$ est un sev de $\mathbb{E}$.
Alors $\mathbb{F}$ admet des supplémentaires dans $\mathbb{E}$ et ils sont tous de même dimension égale à $\dim(\mathbb{E}) - \dim(\mathbb{F})$.

⚠ Il n'y pas unicité d'un supplémentaire mais seulement de sa dimension.

Théorème 19 – Formule de Grassmann

On suppose que $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$ deux sev de $\mathbb{E}$ de dimension finie. $\mathbb{F}+\mathbb{G}$ est alors de dimension finie et :

$$\dim(\mathbb{F}+\mathbb{G}) = \dim(\mathbb{F}) + \dim(\mathbb{G}) - \dim(\mathbb{F}\cap\mathbb{G})$$

✎ ***Exemple.*** Si $\dim(\mathbb{F}) + \dim(\mathbb{G}) > \dim(\mathbb{E})$ alors $\exists x \in \mathbb{F}\cap\mathbb{G}\,;\ x \neq 0_{\mathbb{E}}$.

Corollaire 20 – Inégalité pour la dimension d'une somme de sev

On suppose que $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$ deux sev de $\mathbb{E}$ de dimension finie. Alors :

$$\dim(\mathbb{F}+\mathbb{G}) \leq \dim(\mathbb{F}) + \dim(\mathbb{G})$$

avec égalité si, et seulement si, la somme est directe.

On obtient deux nouvelles caractérisations du fait que $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$ sont supplémentaires dans $\mathbb{E}$, dans le cas où $\mathbb{E}$ est de dimension finie.

Théorème 21 – Caractérisation des sev supplémentaires

On a équivalence de :

(i) $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$ sont supplémentaires dans $\mathbb{E}$: $\mathbb{E} = \mathbb{F}\oplus\mathbb{G}$;

(ii) $\mathbb{F}+\mathbb{G} = \mathbb{E}$ et $\mathbb{F}\cap\mathbb{G} = \{0_E\}$;

(iii) la concaténation d'une base de $\mathbb{F}$ et d'une base de $\mathbb{G}$ donne une base de $\mathbb{E}$;
(c'est alors vrai avec n'importe quelle base de $\mathbb{F}$, et n'importe quelle base de $\mathbb{G}$)

(iv) $\forall x \in \mathbb{E}, \exists!(f,g) \in \mathbb{F}\times\mathbb{G};\ x = f+g$

(v) $\mathbb{E} = \mathbb{F}+\mathbb{G}$ et $\dim(\mathbb{E}) = \dim(\mathbb{F}) + \dim(\mathbb{G})$;

(vi) $\mathbb{F}\cap\mathbb{G} = \{0_{\mathbb{E}}\}$ et $\dim(\mathbb{E}) = \dim(\mathbb{F}) + \dim(\mathbb{G})$.

✎ ***Exemple.*** Dans $\mathbb{R}^3$, on considère $\mathbb{F} = \mathrm{Vect}\big((1,1,1)\big)$ et $\mathbb{G} = \big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 /\ x+y+z=0\big\}$.
Alors $\mathbb{R}^3 = \mathbb{F}\oplus\mathbb{G}$.

3 Compétences à acquérir sur ce chapitre

➥ Savoir calculer la dimension d'un espace vectoriel en donnant une base.

➥ Connaître les propriétés des familles libres en dimension finie.
- ✪ Les utiliser pour montrer rapidement qu'une famille de vecteurs est une base.

➥ Connaître les propriétés des familles génératrices en dimension finie.
- ✪ Les utiliser pour montrer rapidement qu'une famille de vecteurs est une base.

➥ Savoir montrer l'égalité de deux espaces vectoriels grâce à un argument de dimension.

➥ Connaître les propriétés théoriques du rang d'une famille de vecteurs.

➥ Connaître la formule de Grassmann.

➥ Savoir montrer que deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires grâce à un argument de dimension.

4 Exercices

Familles libres, génératrices, bases, dimension

EXERCICE 1. Dans $\mathbb{R}^3$

Les familles suivantes sont-elles des bases de $\mathbb{R}^3$?

$$\mathscr{F}_1 = \big((0,1,2),(1,2,0),(2,0,1)\big) \qquad \mathscr{F}_2 = \big((1,1,0),(2,0,1),(3,1,1),(1,0,2)\big)$$

EXERCICE 2. Dimension de $C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que la famille $\left(x \longmapsto \mathrm{e}^{kx}\right)_{0\leq k\leq n}$ est libre.
En déduire que $C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est de dimension infinie.

EXERCICE 3. Dans $\mathbb{R}^4$

On considère le sous-espace vectoriel $\mathbb{E}$ de $\mathbb{R}^4$ défini par

$$\mathbb{E} = \mathrm{Vect}\Big((1,-1,3,-3),(2,-2,4,-4),(3,-3,7,-7),(1,-1,1,-1)\Big).$$

1. Donner une base et la dimension de $\mathbb{E}$.
2. Déterminer un système d'équations cartésiennes de $\mathbb{E}$.
3. Etablir que $\mathbb{E} \subset \mathbb{F}$, où $\mathbb{F}$ est défini par
$$\mathbb{F} = \mathrm{Vect}\Big((1,0,1,-1),(0,1,2,-2),(1,0,0,0),(0,0,-1,1)\Big)$$
4. On pose $\mathbb{G} = \mathrm{Vect}\Big((1,0,0,1),(1,2,0,0)\Big)$. Vérifier que $\mathbb{E} \cap \mathbb{G} = \{0\}$.

EXERCICE 4. Dans $\mathbb{R}^\mathbb{R}$

On note $\mathbb{R}^\mathbb{R}$ l'ensemble des fonctions numériques définies sur $\mathbb{R}$. On pose :

$$\mathbb{E} = \left\{f \in \mathbb{R}^\mathbb{R} ;\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = a\cos(x) + b\sin(x) + c \text{ où } (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\right\}$$

Montrer que $\mathbb{E}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et donner une base et sa dimension.

EXERCICE 5. Encore dans $\mathbb{R}^\mathbb{R}$

Pour $\alpha > 0$, on note $\mathbb{F}_\alpha$ l'ensemble des fonctions de la forme :

$$x \longmapsto P(x)\mathrm{e}^{\alpha x} + Q(x)\mathrm{e}^{-\alpha x}$$

où P et Q sont des polynômes de degrés inférieurs ou égaux à 1.

1. Montrer que $\mathbb{F}_\alpha$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
2. Déterminer une base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{F}_\alpha$ et en déduire sa dimension.

EXERCICE 6. Exemples de bases de polynômes

1. Soient $P_1 = X^2+1$, $P_2 = X^2+X+1$ et $P_3 = X^2+X$. Montrer que (P_1, P_2, P_3) est une base de $\mathbb{K}_2[X]$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on pose $P_k = (X+1)^{k+1} - X^{k+1}$. Montrer que $(P_0, \dots, P_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.
3. Montrer que $\mathbb{F} = \left\{P = aX^4 + (a+b)X;\ (a,b) \in \mathbb{K}^2\right\}$ est un sev de $\mathbb{K}[X]$. Donner en une base et la dimension.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on pose $P_k = X^k(X+1)^{n-k}$. Montrer que $(P_0, \dots, P_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

EXERCICE 7. Dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$

1. Montrer que les $\mathbb{K}$-ev $T_n^+(\mathbb{K})$, $T_n^-(\mathbb{K})$, $\mathscr{S}_n(\mathbb{K}$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ sont de dimension finie et déterminer leur dimension.
2. Si $A = ((a_{ij}))_{1 \le i,j \le n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ on note $\mathrm{Tr}(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{kk}$.
   On pose aussi $\mathbb{H} = \left\{A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K});\ \mathrm{Tr}(A) = 0\right\}$.
   Montrer que $\mathbb{H}$ est un sev de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et déterminer sa dimension.

Rang d'une famille de vecteurs

EXERCICE 8. Une formule sur le rang

Soient $\left(\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_n}\right)$ famille de vecteurs de $\mathbb{E}$ $\mathbb{K}$-ev, et $p \in [\![1, n]\!]$.
Montrer que :

$$\mathrm{rg}\left(\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_n}\right) \le \mathrm{rg}\left(\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_p}\right) + n - p$$

Sommes directes et sous-espaces supplémentaires

EXERCICE 9. Dans $\mathbb{K}^n$

Soient $\mathbb{E} = \left\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n;\ \sum_{k=1}^{n} x_k = 0\right\}$ et $\mathbb{F} = \left\{(\lambda, \lambda, \dots, \lambda) \in \mathbb{K}^n;\ \lambda \in \mathbb{K}\right\}$.

1. Déterminer une base de $\mathbb{E}$ et de $\mathbb{F}$.
2. Montrer que $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{K}^n$.

EXERCICE 10. Dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$

On considère le $\mathbb{K}$-ev $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ des matrices carrées d'ordre n.
On rappelle que $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ désigne l'ensemble des matrices carrées symétriques d'ordre n, et que $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ désigne l'ensemble des matrices carrées antisymétriques d'ordre n.
Montrer que $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ sont des sev supplémentaires de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

EXERCICE 11. Dans $\mathbb{R}^3$

Déterminer un supplémentaire dans $\mathbb{R}^3$ de $\mathbb{F} = \text{Vect}\Big((0,1,1),(1,0,2)\Big)$.

EXERCICE 12. Dans $\mathbb{R}[X]$

On se donne un entier naturel $n \geq 3$, on note $\mathbb{E}$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$. Montrer que $\mathbb{F} = \left\{P \in \mathbb{R}_n[X];\ X^3|P\right\}$ et $\mathbb{G} = \text{Vect}\left[X(X-1),(X-1)(X-2),X(X-2)\right]$ sont des sev supplémentaires de $\mathbb{E}$.

EXERCICE 13. Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

On note $\mathbb{E}$ l'ensemble des $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = u_{n+2} + u_{n+1} + 2u_n$, $\mathbb{F}$ l'ensemble des $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que : $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = 2a_n$ et $\mathbb{G}$ l'ensemble des $(b_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad b_{n+2} = -b_{n+1} - b_n$.

1. Vérifier que $\mathbb{E}$, $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$ sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.
2. Déterminer une base et la dimension de $\mathbb{F}$ et de $\mathbb{G}$.
3. On admet que $\dim(\mathbb{E}) = 3$. En déduire que : $\mathbb{E} = \mathbb{F} \oplus \mathbb{G}$. Donner alors une base de $\mathbb{E}$.
4. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 0$, $u_2 = 2$ et :
   $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = u_{n+2} + u_{n+1} + 2u_n$.
   Déterminer l'expression de u_n en fonction de n.
5. Sans admettre que $\dim(\mathbb{E}) = 3$, redémontrer que $\mathbb{E} = \mathbb{F} \oplus \mathbb{G}$ par analyse-synthèse.

EXERCICE 14. Hyperplans

Soient $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie notée n. On dira qu'un sev $\mathbb{H}$ de $\mathbb{E}$ est un *hyperplan* lorqu'il existe une droite vectorielle $\mathbb{D}$ de $\mathbb{E}$ telle que $\mathbb{E} = \mathbb{H} \oplus \mathbb{D}$.

1. Montrer que :
   $$\mathbb{H} \text{ est un hyperplan de } \mathbb{E} \iff \dim(\mathbb{H}) = \dim(\mathbb{E}) - 1$$
2. Si $\mathbb{H}_1$ et $\mathbb{H}_2$ sont deux hyperplans de $\mathbb{E}$, donner la dimension de $\mathbb{H}_1 \cap \mathbb{H}_2$.